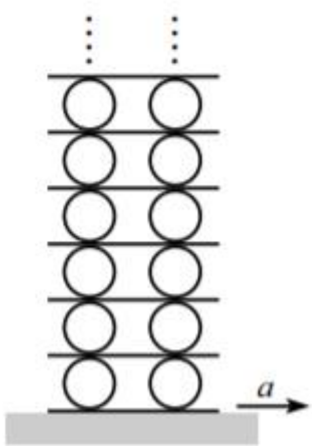
Άπειροι κύλινδροι σε κίνηση

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
4-12-2020

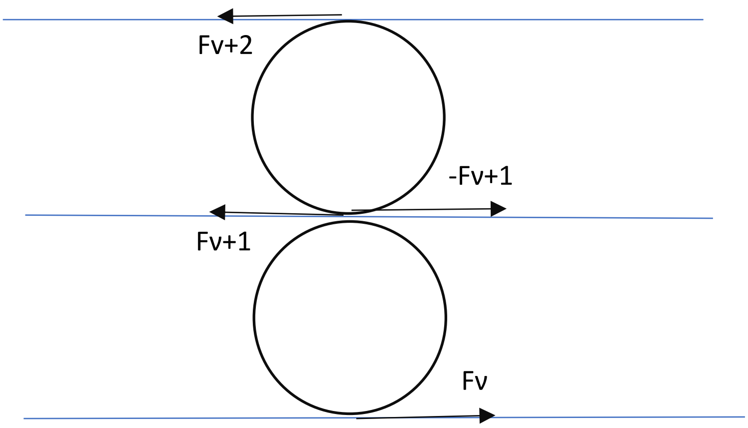
Έστω ότι έχουμε την παρακάτω διάταξη κυλίνδρων, όπου ανάμεσα σε κάθε σειρά κυλίνδρων υπάρχει μια πλάκα. Οι κύλινδροι δεν γλιστράν σε σχέση με τις πλάκες. Οι κύλινδροι σε κάθε σειρά είναι δύο και έχουμε άπειρες σειρές. Αρχίζουμε να κινούμε την κάτω πλάκα με επιτάχυνση α.

Ποια η επιτάχυνση του κέντρου μάζας καθενός κυλίνδρου από την 1^{η} σειρά?

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι η γνωστή.



Λόγω τριβών, εμφανίζονται σε κάθε κύλινδρο δυνάμεις κάτω και πάνω από το κέντρο μάζας. Δηλαδή ισχύει η παρακάτω εικόνα:



Ο κάτω είναι ο κύλινδρος στην ν σειρά και ο πάνω ο κύλινδρος στην ν+1 σειρά. Θα πρέπει να ισχύει για τον νιοστό ότι:

$$F(\nu) - F(\nu + 1) = m\alpha_\nu$$

(1)

Επίσης:

$$F(\nu) + F(\nu + 1) = \frac{1}{2} mR\alpha\gamma\omega\nu_\nu$$

(2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$F(\nu) = \frac{1}{2} m\left(\alpha_\nu + \frac{1}{2} R\alpha\gamma\omega\nu_\nu\right)$$

(3)

Κάνοντας το ίδιο αντίστοιχα για τον ν+1 κύλινδρο παίρνουμε:

$$F(\nu + 1) = \frac{1}{2} m\left(-\alpha_{\nu+1} + \frac{1}{2} R\alpha\gamma\omega\nu_{\nu+1}\right)$$

(4)

Αντικαθιστώντας την (3) και (4) στην (1) προκύπτει:

$$\alpha_{\nu+1} + \frac{1}{2} R\alpha\gamma\omega\nu_{\nu+1} = -\alpha_\nu + \frac{1}{2} R\alpha\gamma\omega\nu_\nu$$

(5)

Όμως επειδή η πλάκα δεν γλιστράει ως προς τους κυλίνδρους, θα πρέπει πάνω και κάτω οι επιταχύνσεις να είναι ίδιες της σανίδας. Δηλαδή να ισχύει:

$$\alpha_\nu - R\alpha\gamma\omega\nu_\nu = \alpha_{\nu+1} + R\alpha\gamma\omega\nu_{\nu+1}$$

(6)

Έτσι συνδυάζοντας την (5) και (6) παίρνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\alpha_{\nu+1} = -3\alpha_\nu + 2R\alpha\gamma\omega\nu_\nu$$

$$R\alpha\gamma\omega\nu_{\nu+1} = 4\alpha_\nu - 3R\alpha\gamma\omega\nu_\nu$$

(7)

Ας γράψουμε το σύστημα (7) υπό μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \alpha_\nu \\ R\alpha\gamma\omega\nu_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^{\nu-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ R\alpha\gamma\omega\nu_1 \end{pmatrix}$$

(8)

Το πολυώνυμο ιδιοτιμής P(λ) μηδενίζεται όταν μηδενίζεται η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

(9)

Έστω ότι παίρνουμε την πρώτη ιδιοτιμή λ(+) τότε για την αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση θα είναι:

$$\varOmega(+) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(10)

Για την ιδιοτιμή λ(-) είναι:

$$\varOmega(-) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(11)

Αν όμως επιλέξουμε την ιδιοτιμή λ(-) παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή της είναι μεγαλύτερη από την μονάδα άρα πηγαίνει στο άπειρο όταν εξετάζουμε έναν μεγάλο όρο. Αυτό όμως σημαίνει πως θα έχουμε και επιταχύνσεις που πηγαίνουν στο άπειρο, το οποίο άπειρο. Αντίστοιχα και αν σκεφτούμε με διατήρηση ενέργειας. Οπότε δεκτή μόνο η ιδιοτιμή λ(+). Έτσι σύμφωνα με την (10) θα ισχύει:

$$\alpha_1\sqrt{2} = R\alpha\gamma\omega\nu_1$$

(12)

Όμως για την πρώτη πλάκα είναι:

$$\alpha = \alpha_1 + R\alpha\gamma\omega\nu_1$$

(13)

Έτσι από την (12) και (13) παίρνουμε τελικά ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κάθε ένα από τους δύο κυλίνδρους στην πρώτη σειρά:

$$\alpha_1 = (\sqrt{2} - 1)\alpha$$