

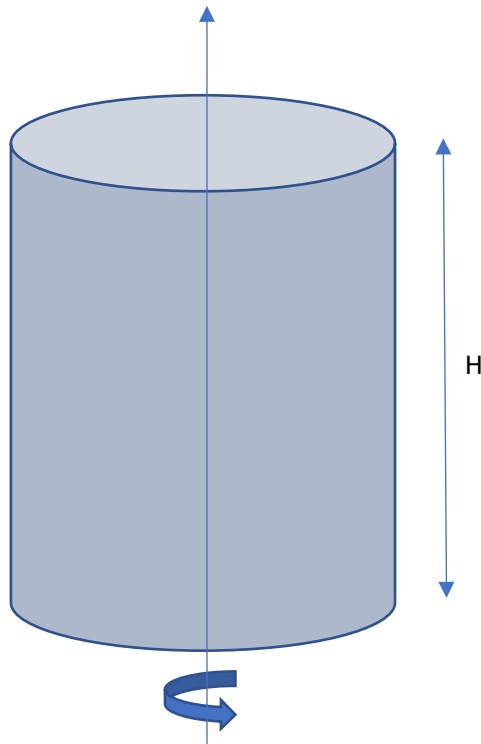
## Ένα δοχείο περιστρέφεται

### Τερλεμές Σπύρος

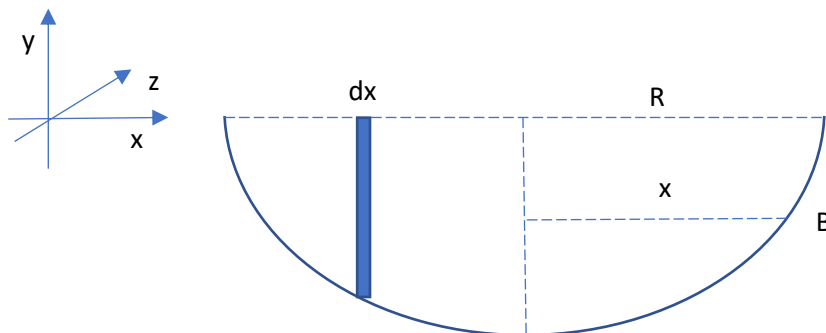
1-11-2020

[spyrosssterlemes@gmail.com](mailto:spyrosssterlemes@gmail.com)

Έστω ένα κυλινδρικό δοχείο ύψους  $H$  με ανοιχτή την επιφάνεια του στον ατμοσφαιρικό αέρα. Το δοχείο περιέχει μια ποσότητα υγρού. Αρχίζουμε να περιστρέφουμε το δοχείο γύρω από άξονα κάθετο στην ανοιχτή επιφάνεια, με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και παρατηρούμε ότι το υγρό οριακά δεν ξεχειλίζει. Πόση θα πρέπει να είναι η ακτίνα  $R$  του δοχείου ώστε η ποσότητα του υγρού να είναι η μέγιστη δυνατή που να ικανοποιεί τα παραπάνω?



Αν πάρουμε ένα κουτάλι και αρχίσουμε να ανακατεύουμε γρήγορα τον καφέ, τότε παρατηρούμε ότι το υγρό «καμπυλώνεται» και δημιουργεί ένα «κενό» προς τα κάτω. Το ίδιο και εδώ. Η πρόσοψη της καμπυλωμένης ποσότητας υγρού θα μοιάζει κάπως έτσι:



Όπου R είναι ακτίνα του δοχείου, αφού το νερό οριακά δεν ξεχειλίζει σημαίνει ότι στο ανώτατο σημείο της καμπύλης η ακτίνα περιστροφής των σωματίων θα είναι R. Επίσης αν B είναι ένα τυχαίο περιστρεφόμενο σωματίο (υγρού) που απέχει x από τον «άξονα» περιστροφής θα πρέπει λόγω της περιστροφής:

$$\vec{F}_κ = -dm\omega^2 x \hat{x} \Rightarrow dpdydz = dm\omega^2 x \Rightarrow dp = \rho\omega^2 x dx$$

(1)

Όμως επειδή υπάρχει ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$$dm\vec{g} + dpdx dz \hat{y} = 0 \Rightarrow -\rho dy g = -dp \Rightarrow dp = \rho g dy$$

(2)

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\rho g dy = \rho\omega^2 x dx \Rightarrow dy = \frac{\omega^2}{g} x dx$$

(3)

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$

(4)

Που είναι μάλιστα η εξίσωση της παραβολής. Θέλουμε να υπολογίσουμε λοιπόν τον όγκο του «κενού» της καμπύλωσης. Αν αφαιρέσουμε από τον όγκο όλου το δοχείου τον όγκο του «κενού» θα πάρουμε τον ζητούμενο όγκο του υγρού. Έχουμε λοιπόν από το δεύτερο σχήμα, ότι μια διαφορετική κατακόρυφη στήλη θα έχει ύψος Y και μήκος dx, όπου:

$$Y = y(R) - y(x) = \frac{\omega^2}{2g} (R^2 - x^2)$$

(5)

Περιστρέφοντας την στήλη, αυτή διαγράφει όγκο:

$$dV' = (2\pi x) Y dx = \frac{\omega^2 \pi}{g} (R^2 - x^2) x dx$$

(6)

Οπότε ο όγκος V' του «κενού» μέρους του δοχείου θα είναι:

$$V' = \frac{\omega^2 \pi}{g} \int_0^R (R^2 x - x^3) dx = \frac{\omega^2 \pi}{g} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\omega^2 \pi}{4g} R^4$$

(7)

Οπότε λοιπόν ο όγκος του ζητούμενου υγρού θα είναι:

$$V = \pi R^2 H - \frac{\omega^2 \pi}{4g} R^4 = -\frac{\omega^2 \pi}{4g} (R^2)^2 + \pi R^2 H$$

(8)

Παραγωγίζουμε μερικώς την (8) ως προς  $R^2$  και παίρνουμε ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial R^2} = -\frac{\omega^2 \pi}{2g} R^2 + \pi H$$

(9)

Παραγωγίζοντας ξανά έχουμε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική, οπότε ο μέγιστος όγκος  $V$  επιτυγχάνεται όταν η (9) είναι μηδέν, δηλαδή όταν:

$$\frac{\omega^2 \pi}{2g} R^2 = \pi H \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2gH}{\omega^2}}$$

(10)

