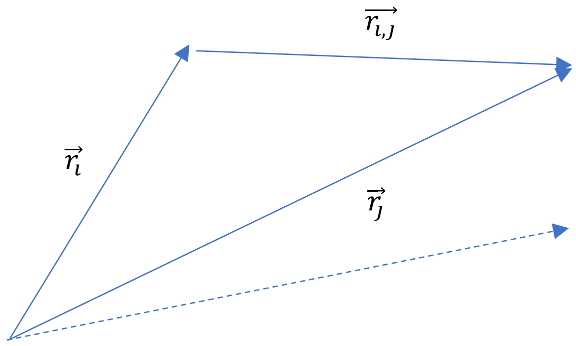
# Αλληλεπίδραση ισόμαζων σωματιδίων με κεντρικές δυνάμεις γραμμικής μορφής


**Τερλεμές Σπύρος**

spyrosssterlemes@gmail.com


3-12-2020

Έστω n σημειακά σωματίδια μάζας m που αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις της μορφής $\lambda\overrightarrow{r_{i,j}}$ όπου λ>0 και $\overrightarrow{r_{i,j}}$ η απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε σωματιδίων i και j.




Κάθε σωματίδιο δέχεται n-1 δυνάμεις τέτοιας μορφής οι οποίες βάσει της αρχής της υπέρθεσης αθροίζονται ώστε να δώσουν την συνολική δύναμη που επιδρά σε ένα συγκεκριμένο σωματίδιο. Δηλαδή αν υποθέσουμε ένα σωμάτιο α σε κάποια θέση $\vec{r_a}$ από το σύστημα αναφοράς, τότε θα ισχύει:

$$m\ddot{\vec{r_a}} = \lambda\overrightarrow{r_{a,1}} + \cdots + \lambda\overrightarrow{r_{a,a-1}} + \cdots = \lambda\left(\sum_{i=1}^{a-1}\overrightarrow{r_{a,i}} + \sum_{i=\alpha+1}^{n}\overrightarrow{r_{a,i}}\right)$$

(1)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μελετάμε το σωματίδιο α+1. Τότε για αυτό θα ισχύει αντίστοιχα:

$$m\ddot{\overrightarrow{r_{a+1}}} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{\alpha}\overrightarrow{r_{\alpha+1,i}} + \sum_{i=a+2}^{n}\overrightarrow{r_{a+1.i}}\right)$$

(2)

Αφαιρούμε τις διαφορικές (2) και (1) και έχουμε:

$$m\ddot{\overrightarrow{r_{a,a+1}}} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{a}\overrightarrow{r_{a+1,i}} - \sum_{i=1}^{a-1}\overrightarrow{r_{a,i}} + \sum_{i=a+2}^{n}\overrightarrow{r_{a+1,i}} - \sum_{i=a+1}^{n}\overrightarrow{r_{a,i}}\right)$$

(3)

Αναδιατάσσουμε τα αθροίσματα στην μορφή:

$$m\ddot{\overrightarrow{r_{a,a+1}}} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{\alpha-1}(\overrightarrow{r_{a+1,\imath}} - \overrightarrow{r_{a,\imath}}) + \overrightarrow{r_{a+1,a}} - \overrightarrow{r_{a,a+1}} + \sum_{i=a+2}^{n}(\overrightarrow{r_{a+1,\imath}} - \overrightarrow{r_{a,\imath}})\right)$$

(4)

Ισχύει όμως ότι:

$$\overrightarrow{r_{a+1,\imath}} - \overrightarrow{r_{a,\imath}} = \overrightarrow{r_{a+1,a}}$$

(5)

Έτσι σύμφωνα με την σχέση (5) η διαφορική εξίσωση (4) παίρνει την μορφή:

$$m\ddot{\overrightarrow{r_{a,a+1}}} = \lambda\overrightarrow{r_{a+1,a}}(a - 1 + 2 + n - a - 1) = -\lambda n\,\overrightarrow{r_{a,a+1}}$$

(6)

Έτσι έχουμε την εξής σχέση μεταξύ δύο σωματιδίων α και α+1:

$$\ddot{\overrightarrow{r_{a,a+1}}} = -\frac{\lambda n}{m}\overrightarrow{r_{a,a+1}}$$

(17)

Δηλαδή έχουμε μια ακολουθία P που μεταξύ δύο γειτονικών όρων α και α+1 ισχύει η σχέση (17) και λόγω γραμμικότητας θα ισχύει και για κάθε i και j με $i \neq j$. Άρα για δύο τυχαία σωματίδια i και j ισχύει:

$$\ddot{\overrightarrow{r_{\imath,\jmath}}} = -\frac{\lambda n}{m}\overrightarrow{r_{\imath,\jmath}}$$

(18)

Η σχέση (18) είναι διανυσματικής μορφής γραμμική 2ης τάξης διαφορική εξίσωση, η οποία αν αναλυθεί σε ορθοκανονικές συνιστώσες γράφεται:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{\lambda n}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{\lambda n}{m}y = 0 \\ \ddot{z} + \dfrac{\lambda n}{m}z = 0 \end{cases}$$

(19)

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για κάθε μια από την συλλογή των διαφορικών είναι:

$$\kappa^2 + \frac{\lambda n}{m} = 0 \Rightarrow \kappa = \pm i\sqrt{\frac{\lambda n}{m}}\ \ \acute{o}\pi o\upsilon \frac{\lambda n}{m} > 0$$

(20)

Έτσι η λύση του συστήματος (19) είναι:

$$\begin{cases} A_x\cos(\omega t)+B_x\sin(\omega t)=x \\ A_y\cos(\omega t)+B_y\sin(\omega t)=y \\ A_z\cos(\omega t)+B_z\sin(\omega t)=z \end{cases}$$

(21)

Όπου $\omega=\sqrt{\lambda n/m}$ και οι συντελεστές σταθερές καθοριζόμενες από τις οριακές συνθήκες. Έχουμε δηλαδή βρει τις χρονικές συναρτήσεις των συνιστωσών του διανύσματος $\overrightarrow{r_{i,j}}$.

Άρα λοιπόν για το αρχικό διάνυσμα ισχύει η σχέση:

$$\left|\overrightarrow{r_{i,j}}\right|^2\equiv r_{i,j}^2=x^2+y^2+z^2$$

(22)

Λόγω όμως του συστήματος (21) παίρνουμε:

$$r_{i,j}^2=\left(A_x^2+A_y^2+A_z^2\right)\cos^2(\omega t)+\left(B_x^2+B_y^2+B_z^2\right)\sin^2(\omega t)+ \\ +2\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

(23)

Παρατηρούμε ότι αν ορίσουμε τα διανύσματα:

$$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$$

$$\vec{B}=B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}$$

Τότε η σχέση (23) γράφεται:

$$\begin{aligned} r_{i,j}^2&=A^2\cos^2(\omega t)+2\vec{A}\vec{B}\cos(\omega t)\sin(\omega t)+B^2\sin^2(\omega t) \\ &=\left(\vec{A}\cos(\omega t)+\vec{B}\sin^2(\omega t)\right)^2 \end{aligned}$$

(24)

Τελικά δηλαδή το διάνυσμα $\overrightarrow{r_{i,j}}$ γράφεται στην μορφή:

$$\overrightarrow{r_{i,j}}=\vec{A}\cos(\omega t)+\vec{B}\sin(\omega t)$$

(25)

Όπου τα διανύσματα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι σταθερά. Δηλαδή η σχετική απόσταση των σωματιδίων i και j είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη άρα και φραγμένη παρουσιάζοντας μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή τα δύο τυχαία σωματίδια εκτελούν ένα είδος ταλάντωσης το ένα ως προς το άλλο. Εφόσον τα σωματίδια είναι τυχαία τότε σημαίνει πως κάθε σωματίδιο βλέπει τα υπόλοιπα n-1 σωματίδια να μεταβάλλουν την απόσταση τους ως προς αυτό με αρμονικό τρόπο. Παραγωγίζοντας την σχέση (25) παίρνουμε τον ρυθμό μεταβολής της σχετικής απόστασης, δηλαδή την σχετική ταχύτητα των δύο τυχαίων σωματιδίων:

$$\dot{\overrightarrow{r_{i,j}}} = -\omega\vec{A}\sin(\omega t) + \omega\vec{B}\cos(\omega t)$$

(26)

Τόσο τα ελάχιστα όσο και τα μέγιστα άνω και κάτω φράγματα αντίστοιχα επιτυγχάνονται όταν η παράγωγος μηδενίζεται αφού η (26) είναι συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα για t. Εφόσον δηλαδή η (26) είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα τότε είναι και φραγμένη οπότε παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή άρα τα crucial points είναι και max-minima points. Θα εκμεταλλευτούμε τις σχέσεις (25) και (26) ώστε να μελετήσουμε την κίνηση κάθε σωματιδίου ξεχωριστά.

Επιστρέφοντας στην αρχική σχέση (1) έχουμε ότι ένα σωματίδιο i υπακούει στην σχέση:

$$m\ddot{\vec{r_i}} = \lambda\left(\sum_{j=1}^{i-1}\overrightarrow{r_{i,j}} + \sum_{j=i+1}^{n}\overrightarrow{r_{i,j}}\right)$$

(27)

Για ένα διακριτό όμως τέτοιο άθροισμα θα πρέπει να ισχύει:

$$\sum_{i}^{N}\overrightarrow{r_{i,j}} = \left(\vec{A} + \cdots\right)\cos(\omega t) + \left(\vec{B} + \cdots\right)\sin(\omega t) = \vec{D}\cos(\omega t) + \vec{C}\sin(\omega t)$$

(28)

Έτσι βάσει της σχέσης (28) μπορούμε να αναδιατάξουμε την (27) και να πάρουμε την διαφορική που για το σωματίδιο i. Δηλαδή:

$$\ddot{\vec{r_i}} = \frac{\lambda}{m}\left(\vec{D}\cos(\omega t) + \vec{C}\sin(\omega t)\right)$$

(29)

Γράφοντας σε ορθοκανονικές συνιστώσες την (29) έχουμε:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\lambda}{m}D_x\cos(\omega t) + \dfrac{\lambda}{m}C_x\sin(\omega t) \\ \ddot{y} = \dfrac{\lambda}{m}D_y\cos(\omega t) + \dfrac{\lambda}{m}C_y\sin(\omega t) \\ \ddot{z} + \dfrac{\lambda}{m}D_z\cos(\omega t) + \dfrac{\lambda}{m}C_z\sin(\omega t) \end{cases}$$

(30)

Παρατηρούμε ότι κάθε μια είναι της μορφής:

$$\ddot{q} = \mathrm{a}\cos(\omega t) + bsin(\omega t)$$

(31)

Ολοκληρώνουμε δύο φορές:

$$q = \int (\int \left(\mathrm{a}\cos(\omega t) + bsin(\omega t)\right)dt + c)dt + c'$$

$$q = \int \left(\frac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{b}{\omega}\cos(\omega t) + c\right)dt + c'$$

$$q = -\frac{a}{\omega^2}\cos(\omega t) - \frac{b}{\omega^2}\sin(\omega t) + ct + c'$$

(32)

Έτσι εφόσον η κάθε λύση ισχύει για κάθε συντεταγμένη, τότε έχουμε ουσιαστικά λύσει την διαφορική (29) σε μορφή συστήματος συνιστωσών:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\lambda D_x}{m\omega^2}\cos(\omega t) - \dfrac{\lambda D_y}{m\omega^2}\sin(\omega t) + c_x t + c_x{}' \\ y = \cdots \\ z = \cdots \end{cases}$$