

Αποσβεστική κίνηση δύο σωμάτων σε ελατήριο

Τερλεμές Σπύρος

spyrosssterlemes@gmail.com

12-11-2020

Θεωρούμε δύο σώματα ίδιας μάζας m που είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους με ελατήριο σταθεράς k . Τα σώματα βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Έστω ότι σε κάθε ένα επιδρά δύναμη απόσβεσης της μορφής $-b\dot{u}$. Παρακάτω μελετάται η κίνηση του συστήματος καθώς και κάθε σώματος ξεχωριστά.



Θεωρούμε x_1 και x_2 τις θέσεις του δεξιού και αριστερού σώματος αντίστοιχα, ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς. Ο 2^{ος} νόμος Newton για κάθε σώμα δίνει το σύστημα των διαφορικών:

$$m\ddot{x}_1 = -b\dot{x}_1 - kx$$

$$m\ddot{x}_2 = -b\dot{x}_2 + kx$$

(1)

Όπου x η επιμήκυνση συσπείρωσης του ελατηρίου. Αφαιρούμε κατά μέλη:

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 2kx = 0$$

(2)

Η σχέση αυτή γράφεται ισοδύναμα στην μορφή:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$$

(3)

Η (3) είναι γραμμική, ομογενής, 2^{ης} τάξης διαφορική, με σταθερούς συντελεστές.

Υποθέτουμε λύση $x = e^{\lambda t}$, οπότε προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{2k}{m} = 0$$

(4)

Το πολυώνυμο της (4) έχει λύσεις:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{b^2 - 8km}$$

(5)

Ανάλογα με την μορφή της υπόριζης ποσότητας έχουμε και τις αντίστοιχες λύσεις. Ας υποθέσουμε ότι το τετράγωνο της σταθεράς b είναι σχετικά μικρό σε σχέση με το τον δεύτερο όρο της ρίζας πράγμα απολύτως λογικό αφού η σταθερά b στην φύση συνήθως συναντάται σε μικρές τιμές (δεν είναι κανόνας). Τότε η υπόριζη ποσότητα είναι αρνητική οπότε η (5) γράφεται στην μορφή:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{i}{2m} \sqrt{8km - b^2}$$

(6)

Χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης παίρνουμε ως γενική λύση την:

$$x(t) = e^{-\frac{bt}{2m}} \left[C_1 e^{\frac{i}{2m} \sqrt{8km - b^2} t} + C_2 e^{-\frac{i}{2m} \sqrt{8km - b^2} t} \right]$$

(7)

Από τον τύπο του De Moivre η (7) αναγράφεται στην κομψότερη μορφή:

$$x = e^{-\frac{bt}{2m}} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

(8)

Όπου $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ και είναι σταθερό. Παρατηρούμε επίσης ότι η αρχική διαφορική είναι 2^{ης} τάξης άρα οι σταθερές A και B καθορίζονται από τις οριακές συνθήκες της x και της παραγώγου της. Δηλαδή:

$$x(0) = A$$

Επίσης:

$$\dot{x} = -\frac{2m}{b} e^{-\frac{bt}{2m}} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + e^{-\frac{bt}{2m}} (-A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t))$$

(9)

Οπότε την στιγμή μηδέν είναι:

$$\dot{x}(0) = -\frac{2m}{b} A + B \omega \Rightarrow B = \frac{1}{\omega} \left(-\frac{2m}{b} \dot{x}(0) - \dot{x}(0) \right)$$

(10)

Τώρα τόσο η σταθερά $x(0)$ όσο και η σταθερά $\dot{x}(0)$ καθορίζονται από της αρχικές θέσεις και ταχύτητες των σωμάτων. Δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$x(0) = x_1(0) - x_2(0) - l \quad \text{και} \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)$$

Οπότε οι διαφορικές της σχετικής κίνησης των σωμάτων είναι:

$$x = e^{-\frac{bt}{2m}} \left[x(0) \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{2m}{b} x(0) + \dot{x}(0) \right) \sin(\omega t) \right]$$

$$\dot{x} = e^{-\frac{bt}{2m}} \left[\left(B\omega - \frac{2m}{b} A \right) \cos(\omega t) - \left(A\omega + \frac{2m}{b} B \right) \sin(\omega t) \right]$$

(11)

Όπου:

$$A = x(0), \quad B = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{2m}{b} x(0) + \dot{x}(0) \right), \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$