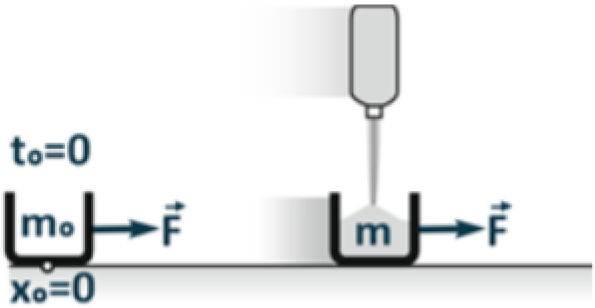
Κινούμενο δοχείο και άμμος

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
28-11-2020

Έστω ένα δοχείο αρχικής μάζας m(0) που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ. Ασκούμε στο δοχείο οριζόντια δύναμη F προς τα δεξιά. Ταυτόχρονα καθόλη την κίνηση του δοχείου, από πάνω του ρίχνουμε άμμο με σταθερό ρυθμό γ.



Ποια στιγμή μηδενίζεται η επιτάχυνση του δοχείου?

Ποια η γραφική παράσταση της ταχύτητας έως την στιγμή μηδενισμού της επιτάχυνσης?

Ο δεύτερος νόμος Newton για το σώμα γράφεται:

$$F-\mu m(t)g=\frac{dp}{dt}=\frac{dm(t)}{dt}\upsilon+m(t)\frac{d\upsilon}{dt}$$

(1)

Όμως είναι: $m(t)=m(0)+\gamma t$ άρα η σχέση (1) γράφεται:

$$F-\mu(m(0)+\gamma t)g=\gamma\upsilon+(m(0)+\gamma t)\frac{d\upsilon}{dt}$$

(2)

Διαιρούμε με τον συντελεστή της παραγώγου της ταχύτητας:

$$\frac{d\upsilon}{dt}+\frac{\gamma}{m(0)+\gamma t}\upsilon=\frac{F}{m(0)+\gamma t}-\mu g$$

(3)

Η (3) είναι μη ομογενής γραμμική 1ης τάξης, οπότε λύνεται πολύ εύκολα. Ο πολλαπλασιαστής Euler είναι:

$$I(t) = e^{\int \frac{\gamma}{m(0)+\gamma t} dt} = e^{\ln(m(0)+\gamma t)} = m(0) + \gamma t$$

(4)

Οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη της σχέσης (3) έχουμε:

$$\upsilon(m(0) + \gamma t) = \int F dt - \mu g \int (m(0) + \gamma t) dt + C$$

(5)

Φυσικά λόγω των αρχικών συνθηκών είναι C=0 άρα:

$$\upsilon(m(0) + \gamma t) = (F - \mu m(0) g) t - \frac{1}{2} \mu \gamma g t^2$$

(5)

Δηλαδή:

$$\upsilon = \frac{(F - \mu m(0) g) t}{m(0) + \gamma t} - \frac{1}{2} \frac{\mu \gamma g}{m(0) + \gamma t} t^2$$

Παραγωγίζουμε:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = (F - \mu m(0) g) \frac{m(0)}{(m(0) + \gamma t)^2} - \frac{1}{2} \mu \gamma g \frac{\gamma t^2 + 2m(0) t}{(m(0) + \gamma t)^2}$$

(6)

Δηλαδή όταν η επιτάχυνση μηδενίζει είναι:

$$\frac{1}{2} \mu \gamma^2 g t^2 + \mu \gamma m(0) g t - (F - \mu m(0) g) m(0) =$$

(7)

Έτσι αν μ=0,5, γ=0,4 kg/s, m(0)=1kg, F=25N είναι:

$$t^2 + 5t - 50 = 0$$

Έτσι:

$$t = 5sec$$

Αν όμως κάναμε την «λαθεμένη» μέθοδο και λέγαμε ότι η επιτάχυνση μηδενίζεται όταν οι δυνάμεις εξισορροπούνται (αφού ΣF=ma) δηλαδή όταν F=T θα είχαμε:

$$F = \mu(m(0) + \gamma t) g$$

Δηλαδή θα βγάζαμε χρόνο:

$$t = \frac{F - \mu m(0) g}{\mu \gamma g}$$

Άρα θα βγάζαμε τον διπλάσιο χρόνο από τον κανονικό. Δηλαδή αν m(0)=1kg, F=25N, μ=0,5 και γ=0,4 kg/s, τότε η χρονική στιγμή που η μηδενίζεται η επιτάχυνση θα έβγαινε t=10sec το οποίο είναι φυσικά λάθος.

Από την σχέση (5) έχουμε αντικαθιστώντας τα νούμερα, ότι η ταχύτητα είναι:

$$\upsilon(t) = \frac{20t}{1+0{,}4t} - \frac{t^2}{1+0{,}4t} = \frac{-t^2+20t}{1+0{,}4t}$$

(8)

Θέλουμε να σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτή. Αρχικά εφόσον το πεδίο ορισμού είναι όλες οι μη αρνητικές τιμές μέχρι την στιγμή που μηδενίζει η παράγωγος, τα crucial points είναι μόνο t=5sec όπως βρήκαμε.

Παρατηρούμε ότι για 0<t<5sec η παράγωγος είναι θετική. Οπότε για 0<t<5sec η υ είναι αύξουσα.

Όταν t=0 είναι η ταχύτητα υ=0 και όταν t=5sec η ταχύτητα είναι υ=25m/s.

Επίσης η 2η παράγωγος της υ είναι αρνητική στο διάστημα 0<x<5 άρα η υ είναι κοίλη. Οπότε τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε πολύ εύκολα την γραφική παράσταση της ταχύτητας η οποία θα είναι έτσι: