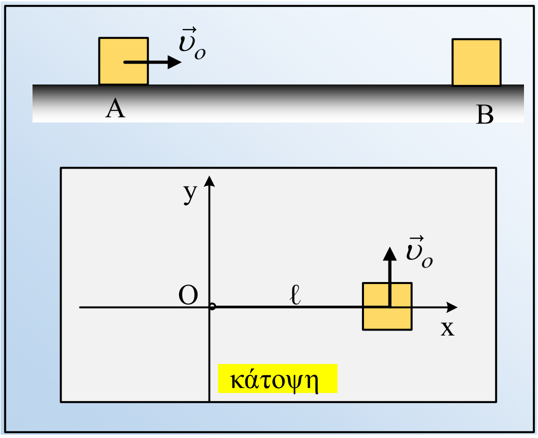
Κυκλική κίνηση και Τριβή.

Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ=0,2, στη θέση Α. Σε μια στιγμή δέχεται στιγμιαίο κτύπημα αποκτώντας αρχική ταχύτητα $υ_ο$, με αποτέλεσμα να μετακινείται κατά $x_{ολ}$=9m, πριν σταματήσει στη θέση Β.



i) Να υπολογιστούν τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα:

α) Μόλις αρχίσει να κινείται, μετά το κτύπημα.

β) Στη θέση Β.

ii) Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα $υ_0$.

Το ίδιο σώμα δένεται στο άκρο νήματος μήκους ℓ=(2/π)m, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο Ο, του ίδιου οριζοντίου επιπέδου, όπως στο κάτω σχήμα (σε κάτοψη). Σε μια στιγμή το σώμα δέχεται επίσης κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτά αρχική ταχύτητα μέτρου $υ_ο$, με διεύθυνση κάθετη στο νήμα.

iii) Να δώσετε κατάλληλα σχήματα στα οποία να εμφανίζονται οι ασκούμενες δυνάμεις στο σώμα, των οποίων να υπολογίσετε τα μέτρα, με δεδομένο ότι η τάση του νήματος ευθύνεται για την αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας:

α) Μόλις αρχίσει να κινείται, μετά το κτύπημα.

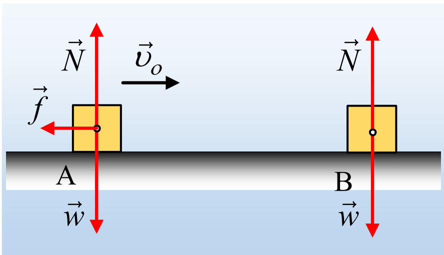
β) Στη θέση που θα σταματήσει.

iv) Να βρεθεί η θέση που τελικά το σώμα θα ηρεμήσει.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, στη θέση Α (μόλις αποκτήσει ταχύτητα, οπότε δέχεται και δύναμη τριβής ολίσθησης, την οποία έχουμε συμβολίσει ως $\vec{f}$), καθώς και στη θέση Β, όπου σταματά.



α) Για την θέση Α:

$$ΣF_y=0 \rightarrow N=w= mg \text{ ή}$$

$$N=w=2 \cdot 10N=20N$$

Ενώ για την τριβή ολίσθησης έχουμε:

$$f= μmg=0,2 \cdot 2 \cdot 10N=4N$$

β) Τα ίδια διατηρούνται και τα μέτρα των δυνάμεων N και w οι οποίες ασκούνται στο σώμα στη θέση Β.

ii) Εφαρμόζουμε για το σώμα, το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, από την θέση Α μέχρι τη θέση που σταματά, στο Β:

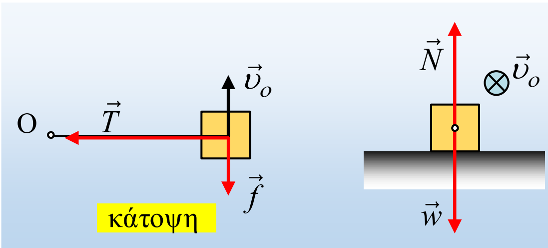
$$K_B - K_A = W_w + W_N + W_f \,(1)$$

Όμως W_w=W_N=0, αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στην μετατόπιση και με αντικατάσταση στην (1):

$$0 - \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 = 0 + 0 - f \cdot x_{o\lambda} \rightarrow$$

$$\upsilon_o = \sqrt{\frac{2f \cdot x_{o\lambda}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{2}} m/s = 6m/s$$

iii) Βλέποντας το σχήμα σε κάτοψη, παίρνουμε το πρώτο σχήμα, στο οποίο έχουν σημειωθεί η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η τριβή $\vec{f}$, αφού το βάρος και η Ν είναι κάθετες στο επίπεδο της κίνησης. Μια τομή της τροχιάς, θα μπορούσε να μας επιτρέψει τον εύκολο σχεδιασμό των δυνάμεων αυτών, όπως στο δεύτερο σχήμα, όπου κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, με φορά προς τα μέσα είναι η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$:



α) Μόλις αρχίσει το σώμα να κινείται, έχουμε τις τέσσερες παραπάνω δυνάμεις με μέτρα w=20N, N =*20N*, ενώ για την τριβή ολίσθησης έχουμε ξανά $f = \mu mg = 0{,}2 \cdot 2 \cdot 10N = 4N$.

Η τάση του νήματος έχει μέτρο:

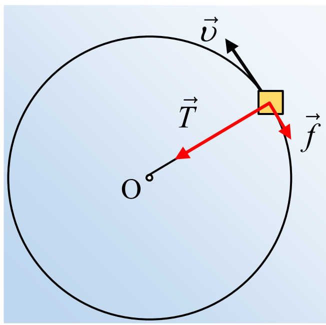
$$T = m\frac{\upsilon_o^2}{R} = m\frac{\upsilon_o^2}{l} = 2 \cdot \frac{6^2}{2/\pi} N = 36\pi \ N$$

β) Μόλις σταματήσει το σώμα, θα μηδενιστεί τόσο η τριβή, όσο και η τάση του νήματος, μένοντας μόνο το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, με τιμές όπως παραπάνω.

iv) Εφαρμόζουμε ξανά για το σώμα, το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, από την αρχική θέση μέχρι τη θέση που σταματά:

$$K_\tau - K_\alpha = W_w + W_N + W_f + W_T \,(2)$$

Όμως W_w=W_N= W_T= 0, αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στην μετατόπιση (οι δυο πρώτες κατακόρυφες, ενώ η τάση με κατεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς, άρα κάθετη στην ταχύτητα, η οποία είναι εφαπτόμενη στον κύκλο).



Εξάλλου η τριβή δεν είναι μια σταθερή δύναμη, αφού είναι διαρκώς αντίθετης κατεύθυνσης από την ταχύτητα, συνεπώς εφαπτόμενη του κύκλου τον οποίο διαγράφει το σώμα. Αλλά για μια στοιχειώδη μετατόπιση dx ίση με το αντίστοιχο στοιχειώδες τόξο ds, το έργο της είναι:

$$dW_i = |f| \cdot |dx| \cdot \sigma\upsilon\nu 180° = -|f| \cdot |ds|$$

Αλλά τότε για το ολικό έργο της τριβής, δεν έχουμε παρά να χωρίσουμε την τροχιά που διαγράφει το σώμα σε στοιχειώδη τόξα ds και αφού υπολογίσουμε τα επιμέρους στοιχειώδη έργα dW, στο τέλος να τα προσθέσουμε, παίρνοντας:

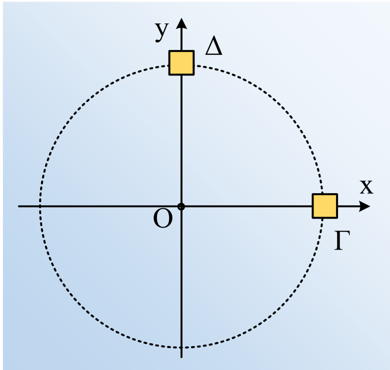
$$W_f = \sum dW_i = -\sum |f| \cdot |ds| = -|f| \cdot \sum |ds| = -f \cdot s_{o\lambda}$$

Οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$0 - \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 = 0 + 0 + 0 - f \cdot s_{o\lambda} \rightarrow$$

$$s_{o\lambda} = \frac{m\upsilon_o^2}{2f} = \frac{2 \cdot 6^2}{2 \cdot 4} m = 9m$$

Λαμβάνοντας υπόψη το μήκος του κύκλου είναι L=2πR, το σώμα θα έχει κάνει N περιφορές γύρω από το κέντρο O, όπου:



$$N = \frac{s_{o\lambda}}{L} = \frac{s_{o\lambda}}{2\pi R} = \frac{9}{2\pi \cdot \frac{2}{\pi}} = \frac{9}{4} = 2,25$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε μας λέει ότι το σώμα έχει διαγράψει δύο πλήρης κύκλους και το ¼ ενός κύκλου. Αν πάρουμε δηλαδή ότι ξεκίνησε την κίνησή του από το σημείο Γ, που βρίσκεται πάνω στον άξονα x, όπως στο διπλανό σχήμα, θα σταματήσει στο σημείο Δ του άξονα y, όπου x,y ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατά την μελέτη της κίνησης…

dmargaris@gmail.com