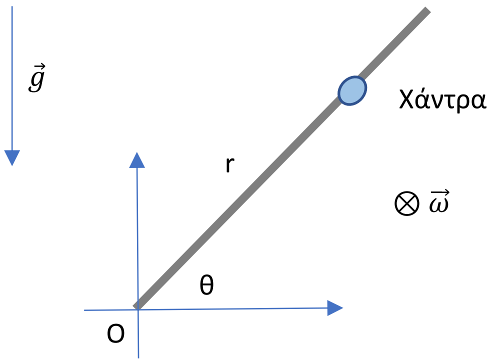
Μελέτη της κίνησης χάντρας σε περιστρεφόμενο σύρμα

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
14-11-2020

Έστω ένα αβαρές, μη εύκαμπτο σύρμα και μια χάντρα μάζας m περασμένη στο σύρμα. Αρχίζουμε να περιστρέφουμε το σύρμα περί το Ο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ κάθετη στην επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$.



Έστω ότι η χάντρα απέχει κάποια στιγμή t απόσταση r από το Ο. Θα μας διευκολύνει να αναλύσουμε την κίνηση της χάντρας ως προς τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\theta}$ και $\hat{r}$ όπου φυσικά:

$$\hat{\theta} = -sin\theta\hat{x} + cos\theta\hat{y}$$

$$\hat{r} = cos\theta\hat{x} + sin\theta\hat{y}$$

Η ταχύτητα της χάντρας είναι λοιπόν:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Επίσης η επιτάχυνση της χάντρας είναι:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}\right)' = \left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)' = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

Η Lagragian του συστήματος είναι λοιπόν:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)^2 - mgrsin\theta$$

Αναλυτικότερα η Lagragian θα είναι:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgrsin\theta$$

Αν θεωρήσουμε N την αντίδραση του σύρματος πάνω στην χάντρα τότε το σύστημα των γενικευμένων εξισώσεων Euler-Lagrange θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = Nr$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0$$

Το οποίο λόγω της μορφής της Lagragian μετασχηματίζεται:

$$m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = N - mgcos\theta$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -gsin\theta$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, άρα θ=ωt, το παραπάνω σύστημα αναμετασχηματίζεται:

$$2m\dot{r}\omega = N - mgcos(\omega t)$$

$$\ddot{r} - \omega^2 r = -gsin(\omega t)$$

Καταλήξαμε στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης που θέλαμε. Αν δούμε την δεύτερη εξίσωση, τότε παρατηρούμε ότι είναι γραμμική, 2ης τάξης, μη ομογενής αλλά με σταθερούς συντελεστές. Οπότε αρχικά θα βρούμε την λύση της ομογενούς και έπειτα την μερική λύση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\omega$$

Οπότε η λύση της ομογενούς είναι:

$$r(o\mu) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Η μερική τώρα λύση, εφόσον το δεύτερο μέλος της διαφορικής είναι ημιτονοειδές, θα είναι:

$$r(\mu\varepsilon\rho) = Csin(\omega t)$$

Η σταθερά C πρέπει να καθορίζεται από την μορφή της διαφορικής και όχι από τις οριακές συνθήκες από τις οποίες καθορίζονται οι σταθερές A και B. Αντικαθιστώντας την r(μερ) στην αρχική διαφορική έχουμε:

$$-\omega^2 C - \omega^2 C = -g \Rightarrow C = \frac{g}{2\omega^2}$$

Οπότε η μερική λύση είναι:

$$r(\mu\varepsilon\rho) = \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$$

Τότε η λύση της διαφορικής θα εκφράζεται από το άθροισμα της μερικής και της ομογενούς, δηλαδή:

$$r = Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$$

Φυσικά πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί r<L όπου L το μήκος του σύρματος. Από τον περιορισμό αυτό βρίσκεται και το διάστημα στο οποίο ανήκουν οι λύσεις t.. Αν παραγωγίσουμε την λύση της διαφορικής παίρνουμε το τριπλό σύστημα:

$$r = Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$$

$$\dot{r} = -\omega Ae^{-\omega t} + B\omega e^{\omega t} + \frac{g}{2\omega}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{r} = \omega^2 Ae^{-\omega t} + B\omega^2 e^{\omega t} - \frac{g}{2}\sin(\omega t)$$

Εφόσον η διαφορική είναι $2^{ης}$ τάξης, οι σταθερές A και B καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες της ίδιας της συνάρτησης και της πρώτης παραγώγου. Δηλαδή την t=0 είναι:

$$r(0) = A + B$$

$$\dot{r}(0) = -\omega A + B\omega + \frac{g}{2\omega} \Rightarrow B - A = \frac{\dot{r}(0)}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε:

$$A = \frac{1}{2}\left(r(0) - \frac{\dot{r}(0)}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2}\right)$$

$$B = \frac{1}{2}\left(r(0) + \frac{\dot{r}(0)}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right)$$

Άρα το τριπλό σύστημα μετασχηματίζεται τώρα με βάση των γνωστών πια A και B σταθερών. Μέχρι στιγμής μπορούμε να βρούμε την θέση, την ταχύτητα, την επιτάχυνση της χάντρας κάθε στιγμή t. Μας μένει η δυναμική μελέτη η οποία επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την πρώτη διαφορική του συστήματος των διαφορικών. Δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε την:

$$2m\dot{r}\omega = N - mgcos(\omega t)$$

Λύνουμε την παραπάνω διαφορική ως προς N και είναι:

$$N = 2m\dot{r}\omega + mgcos(\omega t)$$

$$N = -2mA\omega^2 e^{-\omega t} + 2mB\omega^2 e^{\omega t} + 2mgcos(\omega t)$$

Έχουμε τώρα προσδιορίσει την κινητική και δυναμική κατάσταση της χάντρας συναρτήσει του χρόνου.