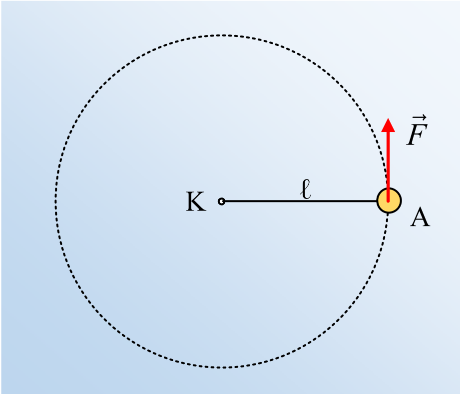
Μια επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στο σημείο Α, ηρεμεί ένα μικρό σώμα μάζας m=2kg δεμένο στο άκρο μη εκτατού νήματος μήκους ℓ=1m, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο Κ. Σε μια στιγμή t=0 ασκούμε στο σώμα μια σταθερού μέτρου δύναμη F=(π/2)Ν, η οποία παραμένει πάντα κάθετη στο νήμα, με αποτέλεσμα το σώμα να διαγράφει τον εστιγμένο κύκλο του σχήματος (σε κάτοψη).



i) Να υπολογισθεί το μέτρο της επιτάχυνσης που αποκτά το σώμα και που έχει την κατεύθυνση της δύναμης (ονομάζεται επιτρόχια επιτάχυνση, αφού είναι εφαπτόμενη στον κύκλο, επί της τροχιάς).

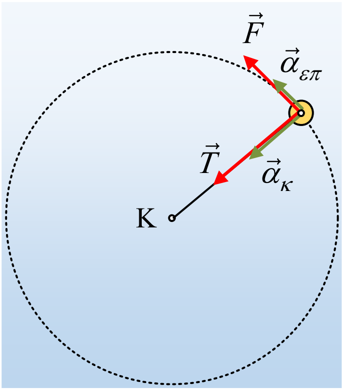
ii) Να γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας, σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii) Σε πόσο χρόνο το σώμα θα ολοκληρώσει την πρώτη πλήρη περιφορά του επιστρέφοντας στην θέση Α;

iv) Να βρεθεί η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1=2s.

Απάντηση:

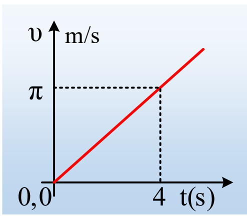
Σε κάθε θέση στο σώμα ασκείται εφαπτομενικά η δύναμη $\vec{F}$, η οποία προκαλεί μια επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_{\varepsilon\pi}$, υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας και η τάση του νήματος $\vec{T}$, με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, η οποία προκαλεί μια κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_{\kappa}$, υπεύθυνη για την αλλαγή της κατεύθυνσης της ταχύτητας.



i) Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου, παίρνουμε:

$$\Sigma F_{\varepsilon} = ma_{\varepsilon} \rightarrow a_{\varepsilon} = \frac{F}{m} = \frac{\pi/2}{2} m/s^2 = \frac{\pi}{4}\ m/s^2$$

ii) Η παραπάνω επιτάχυνση α_ε αυξάνει το μέτρο της ταχύτητας και αφού έχει σταθερό μέτρο, ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας θα είναι σταθερός. Αλλά τότε γράφουμε:



$$\alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{d|\upsilon|}{dt} = \frac{\Delta|\upsilon|}{\Delta t} = \frac{|\upsilon|-0}{t-0} \rightarrow |\upsilon| = a_{\varepsilon\pi} t \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) είναι πρώτου βαθμού και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία, όπως στο σχήμα.

iii) Κατά αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, στην οποία έχουμε σταθερή επιτάχυνση, μπορούμε να γράψουμε για το μήκος του τόξου που διαγράφει το σώμα:

$$s = \frac{1}{2}a_{\varepsilon\pi} \cdot t^2 \quad (2)$$

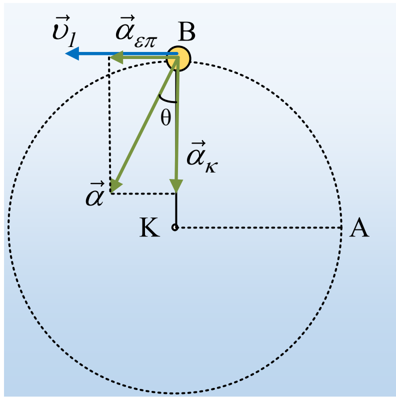
Αλλά τότε τη στιγμή που το σώμα ολοκληρώνει μια περιστροφή, το μήκος του τόξου θα είναι ίσο:

$$s=2\pi R=2\pi\cdot\ell,$$

οπότε από την (2) παίρνουμε:

$$s = \frac{1}{2}a_{\varepsilon\pi} \cdot t^2 \to 2\pi \cdot \ell = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}t^2 \to$$
$$t = \sqrt{16}s = 4s$$

iv) Τη στιγμή t_1 το σώμα έχει διανύσει τόξο μήκους:



$$s_1 = \frac{1}{2}a_{\varepsilon\pi} \cdot t^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} \cdot 2^2 m = \frac{\pi}{2} m .$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος του κύκλου είναι s=2π·ℓ=2π (m), τότε το σώμα έχει διαγράψει:

$$\frac{\pi/2}{2\pi} = 1/4 \quad \text{του κύκλου,}$$

ευρισκόμενο στη θέση Β, του σχήματος, έχοντας διαγράψει γωνία 90°.

Στη θέση αυτή έχει ταχύτητα, εφαπτόμενη στον κύκλο, μέτρου:

$$\upsilon_1 = \alpha_{\varepsilon\pi} t_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 2m/s = \frac{\pi}{2} m/s$$

Εξάλλου η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, έχει μέτρο:

$$a_\kappa = \frac{\upsilon_1^2}{R} = \frac{\left(\pi/2\right)^2}{1} m/s^2 \approx 2,5 m/s^2$$

Αλλά τότε η επιτάχυνση του σώματος στη θέση Β, θα προκύψει από την σύνθεση της επιτρόχιας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης, όπου με τη βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος, θα πάρουμε:

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\varepsilon^2} = \sqrt{2,5^2 + \left(\pi/4\right)^2} m/s^2 \approx 2,6 m/s^2$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την ακτίνα ΒΚ γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\alpha_{\varepsilon\pi}}{\alpha_\kappa} = \frac{\pi/4}{2,5} = 0,314$$

dmargaris@gmail.com