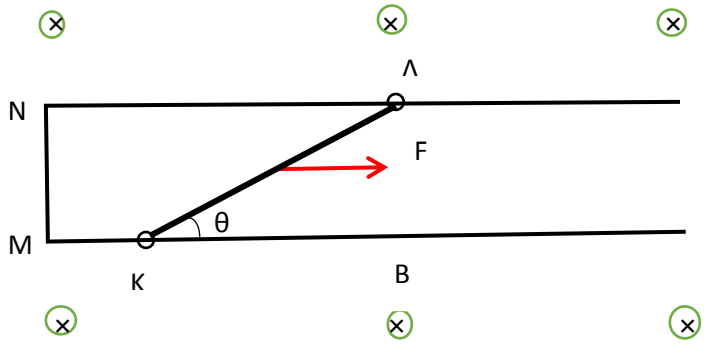
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΟΔΗΓΟΣ - ΕΠΑΓΩΓΗ – ΑΓΩΓΟΣ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ



Η ομογενής μεταλλική ράβδος ΚΛ μήκους l=1m, μάζας m=0,1 Kg και αντίστασης $R_{K\Lambda}$ = 1Ω συνδέεται στα άκρα της με μικρούς μεταλλικούς δακτυλίους οι οποίοι μπορούν να ολισθαίνουν σε παράλληλες, μεταλλικές ράγες χωρίς τριβές. Ο μεταλλικές ράγες είναι στερεωμένες σε οριζόντιο επίπεδο.

Η ΚΛ σχηματίζει γωνία θ=30° με τις ράγες. Οι ράγες μηδενικής αντίστασης συνδέονται στα άκρα τους με αγωγό ΜΝ που έχει αντίσταση R_{MN}=1Ω. Το επίπεδο του κυκλώματος είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης Β=1Τ. Η φορά της έντασης είναι προς τα μέσα.

Κάποια στιγμή t=0 ασκείται στη ράβδο ΚΛ οριζόντια, σταθερή δύναμη μέτρου F=0,5 N παράλληλα στις ράγες. Από t=0 μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 όπου η ΚΛ έχει αποκτήσει οριακή ταχύτητα, στο κύκλωμα εκλύεται θερμότητα Q=0,2 J.

Να βρείτε:

α_1) Την οριακή ταχύτητα

α_2) Την επαγωγική τάση και το επαγωγικό ρεύμα όταν ο ΚΛ έχει την οριακή ταχύτητα.

β) Τη μετατόπιση της ράβδου ΚΛ από t=0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_{1.}$

γ) Το φορτίο που διέρχεται από μία διατομή ενός αγωγού του κυκλώματος από t=0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_{1.}$

δ) Το χρόνο $t_{1.}$

ε) Την επιτάχυνση του ΚΛ όταν ο αγωγός έχει ταχύτητα u=2m/s

ζ) Τους παρακάτω ρυθμούς μεταβολής όταν ο ΚΛ έχει ταχύτητα u=2m/s :

1. Το ρυθμό μεταβολής της επαγωγικής τάσης
2) Το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος.
3) Το ρυθμό μεταβολής της δύναμης Laplace.
4) Το ρυθμό μεταβολής της τάσης στα άκρα του αγωγού ΚΛ.
5) Το ρυθμό με τον οποίο μετατρέπεται η ενέργεια σε θερμική ενέργεια στην αντίσταση R_{MN}.

Τη χρονική στιγμή t= 2s η εξωτερική δύναμη F καταργείται. Να βρείτε:

η_1) Τη θερμότητα που εκλύεται στο κύκλωμα από τη στιγμή $t_{1.}$ μέχρι t=2s.

η_2) Το φορτίο που διέρχεται από μία διατομή ενός αγωγού του κυκλώματος από τη στιγμή $t_{1.}$ μέχρι t=2s.

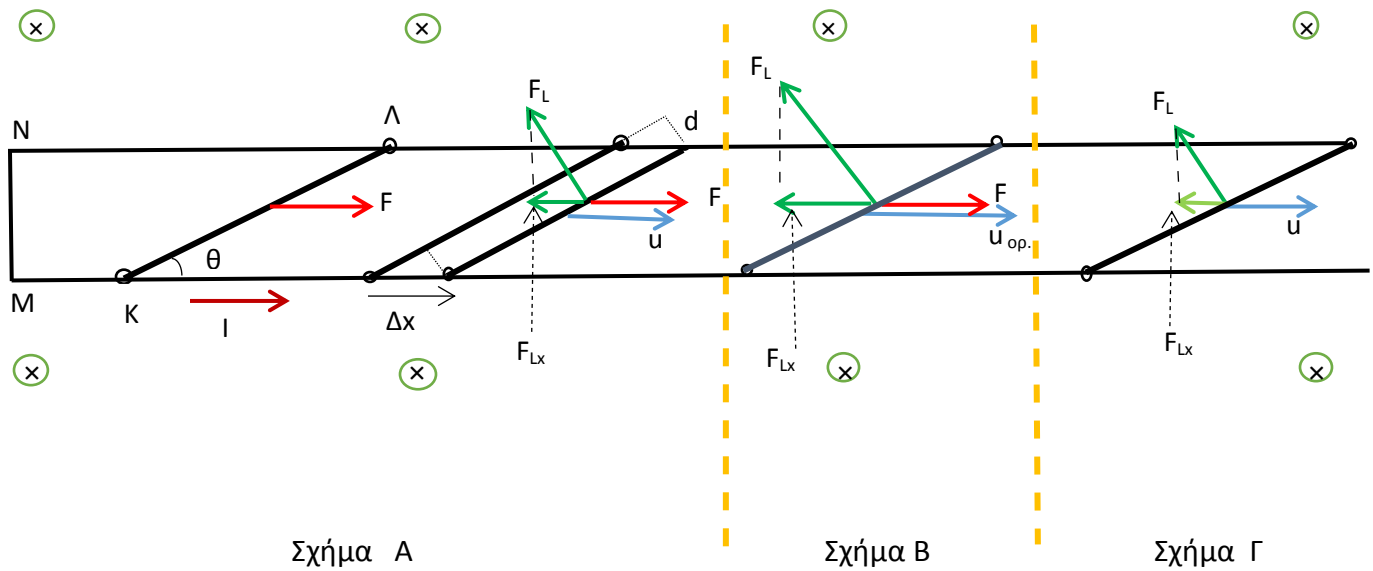
θ) Τη θερμότητα που εκλύεται στην αντίσταση της ΚΛ από t=2s μέχρι να σταματήσει ο αγωγός ΚΛ.

ι) Το φορτίο που διέρχεται από μία διατομή ενός αγωγού του κυκλώματος από t=2s μέχρι να σταματήσει ο αγωγός ΚΛ.

κ) Τη μετατόπιση της ΚΛ από t=2s μέχρι να σταματήσει.

λ) Την επιτάχυνση της ράβδου ΚΛ όταν η ταχύτητά της είναι u=1m/s

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ



α₁) Στο Σχήμα Α θεωρούμε μια στοιχειώδη μετατόπιση Δx της ράβδου ΚΛ που γίνεται σε χρόνο Δt. Η δύναμη F_L σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz είναι προς τα πίσω, κάθετη στη ράβδο ΚΛ.

$F_L = BIl$ όμως $I = \frac{Eεπ.}{Roλ.}$ και $E_{επ.} = \frac{ΔΦ}{Δt}$ άρα $F_L = B\frac{ΔΦ}{Δt\ Roλ.}l$ (1)

Η ΔΦ στο πλάγιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $l - Δx$ είναι: $ΔΦ = B \cdot ΔS$ (2)

Το εμβαδόν $ΔS$ του πλάγιου παραλληλογράμμου, είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου με πλευρές $l - d$ λόγω της ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων, με κάθετη πλευρά d και υποτείνουσα Δx.

(2) => $ΔΦ = B \cdot ΔS = B \cdot l \cdot d$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετη πλευρά d και υποτείνουσα Δx έχουμε : $d = Δx\ ημ30^o = u\ Δt/2$.

Άρα $ΔΦ = B \cdot l \cdot u\ Δt/2$. (3)

(1) , (3) => $F_L = B^2\frac{u}{2\ Roλ.}l^2$ (4)

Αναλύουμε την F_L στη διεύθυνση της δύναμης F : $F_{Lx} = F_L\ ημ30^o$ (5)

Εφαρμόζουμε το 2ο Νόμο του Νεύτωνα στη διεύθυνση της ταχύτητας:

$F - F_{Lx} = mα$ και λόγω των (4) , (5) => $F - F_L\ ημ30^o = mα$ => $F - B^2\frac{u}{4\ Roλ.}l^2 = mα$ (6)

Αρχικά η ταχύτητα της ράβδου είναι μικρή , η διαφορά στο πρώτο μέλος της εξίσωσης (6) είναι μεγάλη και η επιτάχυνση στο δεύτερο μέλος είναι αντίστοιχα μεγάλη. Στη συνέχεια λόγω επιταχυνόμενης κίνησης η διαφορά μικραίνει με κατάληξη να μηδενιστεί. Από τότε και μετά έχουμε ΣF=0 , α=0 και σταθερή ταχύτητα $u_{ορ.}$.

$\Sigma F=0$ => $F - B^2\frac{u_{op.}}{4\,R_{o\lambda.}} l^2 = 0$ => $\boxed{u_{op.} = 4\ m/s}$

α₂) Στο Σχήμα Β $E_{επ.}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ και λόγω της (3) $E_{επ.}= B\cdot l\cdot u/2$ => $\boxed{E_{επ.}= 2\ V}$

$I = \frac{E_{επ.}}{R_{o\lambda.}}$ => $\boxed{I = 1A}$

β) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από t=0 μέχρι τη χρονική στιγμή $t_{1.}$

$\Delta K = \Sigma W$ => $\frac{1}{2} mu^2_{op.} = W_F + W_{FL}$ => $\frac{1}{2} mu^2_{op} = F\Delta x + W_{FL}$ (7)

όμως το W_{FL} εκφράζει την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική στις αντιστάσεις , άρα $W_{FL} = -Q = -0,2\ J$

(7) => $\frac{1}{2}\cdot 0,1\cdot 4^2 = 0,5\Delta x - 0,2$ => $\boxed{\Delta x = 2\ m}$

<u>Προσοχή</u> η χρονική στιγμή t_1 δεν είναι η στιγμή που αποκτάει η ΚΛ οριακή ταχύτητα. Έχει αποκτήσει οριακή ταχύτητα πριν την t_1.

γ) Εφαρμόζουμε το νόμο του Neumann :

$q = \frac{\Delta\Phi}{R_{o\lambda.}} = \frac{B\Delta S}{R_{o\lambda.}}$ Όμως $\Delta S = \Delta x\cdot l\cdot ημ30^0 = 1\ m^2$ άρα $q = 0,5\ C$

δ) Από τον γενικευμένο 2ο Νόμο του Νεύτωνα στην διεύθυνση της δύναμης F έχουμε:

$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ => $\Delta p = (F - F_L ημ30^o)\,\Delta t$ => $\Sigma\,\Delta p = \Sigma\,(F - F_L/2)\,\Delta t$ => $mu_{op} - 0 = \Sigma F\Delta t - \Sigma F_L\,\Delta t/2$ =>

$mu_{op} = F\cdot\Sigma\Delta t - B\cdot l\cdot\Sigma\, i\Delta t/2$ όμως $\Sigma\, i\Delta t = q = 0,5\ C$ άρα $0,1\cdot 4 = 0,5\ t_{1.} - 0,25$ => $\boxed{t_1 = 1,3\ s}$

ε) Από τη σχέση (6) : $F - B^2\frac{u}{4\,R_{o\lambda.}} l^2 = ma$ με αντικατάσταση της $u= 2\ m/s$ προκύπτει $\boxed{a= 2,5\ m/s^2}$

ζ)

1. $\frac{dE_{επ.}}{dt} = \frac{d(\frac{Blu}{2})}{dt} = \frac{Bl}{2}\frac{du}{dt} = \frac{Bl}{2}a$ => $\boxed{\frac{dE_{επ.}}{dt} = 1,25\ V/s}$

2. $\frac{di}{dt} = \frac{dE_{επ.}}{R_{o\lambda.}\Delta t}$ => $\boxed{\frac{di}{dt} = 0,625\ A/s}$

3. $\frac{dF}{dt} = \frac{d(Bli)}{dt} = B\,l\frac{di}{dt}$ => $\boxed{\frac{dF}{dt} = 0,625\ N/s}$

4. $V_{KΛ} = V_{MN} = I\,R_{MN}$. => $\frac{dV}{dt} = \frac{di}{dt} R_{MN}$ => $\boxed{\frac{dV}{dt} = 0,625\ V/s}$

5. $\frac{dQ}{dt} = i^2 R_{MN}$ όμως $I = \frac{E_{επ.}}{R_{o\lambda}} = 0,5\ A$ άρα $\boxed{\frac{dQ}{dt} = 0,5^2\cdot 1 = 0,25\ j/s}$

η₁) Στο σχήμα Β από το νόμο του Joule: $Q = i^2 R_{ολ.}\Delta t$ όμως $I = \frac{E\varepsilon\pi.}{Ro\lambda.} = = 1A$ άρα $\boxed{Q = 1,4\ J}$

η₂) Στο σχήμα Β : $q = I \cdot \Delta t$ => $q = 1 \cdot 0,7$ => $\boxed{q = 0,7\ C}$

θ) Στο Σχήμα Γ η μόνη δύναμη που έχει έργο είναι η δύναμη Laplace. Το έργο της δύναμης Laplace εκφράζει τη μετατροπή της κινητικής ενέργειας της ράβδου σε θερμική ενέργεια στις αντιστάσεις.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη μετατόπιση της ράβδου από τη στιγμή που καταργείται η F μέχρι να σταματήσει η ΚΛ.

$0 - \frac{1}{2} mu^2_{ορ.} = +W_{FL}$ => $W_{FL} = - 0,8\ J$ άρα $\boxed{Q = 0,8\ J}$

ι) Από τον γενικευμένο 2° Νόμο του Νεύτωνα στην διεύθυνση της ταχύτητας έχουμε:

$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ => $\Delta p = -F_L\, ημ30^o \Delta t$ => $\Sigma\, \Delta p = \Sigma\, (-F_L/2)\Delta t$ => $0 - mu_{ορ} = -\Sigma F_L\, \Delta t/2$ =>

$mu_{ορ} = B \cdot l \cdot \Sigma\, i\Delta\, t/2$ όμως $\Sigma\, i\Delta\, t = q$ άρα $0,1 \cdot 4 = q/2$ => $\boxed{q = 0,8\ C}$

κ) Εφαρμόζουμε το νόμο του Neumann :

$q = \frac{\Delta\Phi}{Ro\lambda.} = \frac{B\Delta S}{Ro\lambda.}$ => $\Delta S = 1,6\ m^2$ όμως $\Delta S = l\, d = l\, \Delta\chi\, ημ30^o$ => $\boxed{\Delta x = 3,2m}$

$2^{ος}$ τρόπος (κουμπάρου)

$\Delta q = I\, \Delta t$ => $\Sigma\, \Delta q = \Sigma\, I\, \Delta t$ => $q = \Sigma\, (B\, l\, u\, ημ30^o\, \Delta t) / R_{ολ.}$ => $q = \frac{Bl}{2Ro\lambda.} \Sigma\, u\, \Delta t$ όμως $\Sigma\, u\, \Delta t = \Delta x$

Άρα $q = \frac{Bl}{2Ro\lambda.} \Delta x$ => $0,8 = \Delta x / 4$ => $\boxed{\Delta x = 3,2\ m}$

λ) Εφαρμόζουμε το 2° Νόμο του Νεύτωνα στη διεύθυνση της ταχύτητας:

$-F_{Lx} = m\alpha$ => $-F_L\, ημ30^o = m\alpha$ => $-B^2 \frac{u}{4\, Ro\lambda.} l^2 = m\alpha$ => $\boxed{\alpha = -\frac{5}{4}\ m/s^2}$

pananasgiannis@yahoo.gr