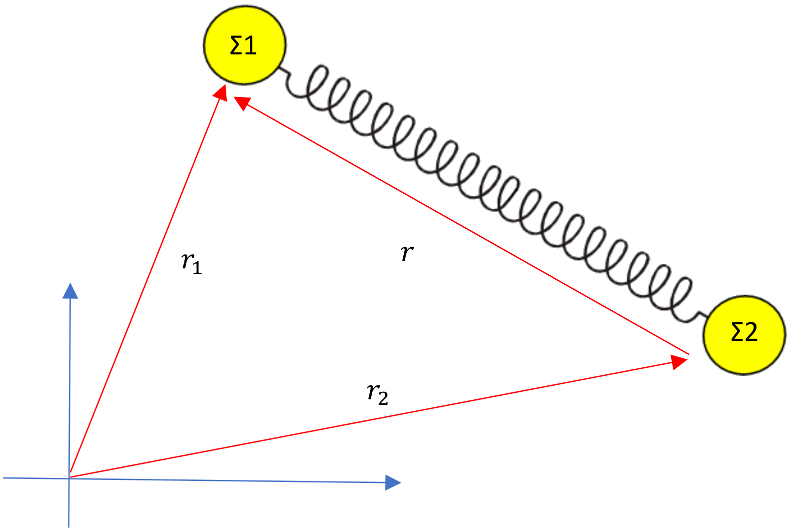
Σύστημα σωμάτων και ελατηρίου σε ελεύθερη περιστροφή

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
30-11-2020

Έστω δύο σώματα μάζας m (Σ1 και Σ2) που είναι μεταξύ τους δεμένα με ελατήριο σταθεράς k με φυσικό μήκος L. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο και δεν παρουσιάζονται τριβές. Παρακάτω μελετάω την σχετική κίνηση του συστήματος.



Έστω κάποια στιγμή που το ελατήριο έχει περιστραφεί κατά γωνία θ. Το σώμα Σ1 έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r_1}$ και το σώμα Σ2 έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r_2}$. Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\vec{r_1} = \vec{r_2} + \vec{r} \Rightarrow \ddot{\vec{r_1}} = \ddot{\vec{r_2}} + \ddot{\vec{r}}$$

(1)

Έτσι ο δεύτερος νόμος Newton για το Σ1 και το Σ2 είναι αντίστοιχα:

$$m\ddot{\vec{r_1}} = m\ddot{\vec{r_2}} + m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{a}$$

$$m\ddot{\vec{r_2}} = k\vec{a}$$

(2)

Όπου $\vec{a}$ είναι συσπείρωση-επιμήκυνση του ελατηρίου, οπότε ισχύει ότι:

$$\vec{a} = \vec{r} - \vec{L}$$

(3)

Αφαιρούμε κατά μέλη της δύο εξισώσεις της σχέσης (2) και παίρνουμε:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{2k}{m}\left(\vec{r} - \vec{L}\right) = 0$$

(4)

Η γωνιακή ταχύτητα ω περιστροφής του συστήματος παραμένει σταθερή αφού οι δυνάμεις είναι κεντρικές. Οπότε θα ισχύει ότι $\theta = \omega t$. Έτσι η διανυσματική διαφορική εξίσωση (4) μπορεί να μετασχηματιστεί στην:

$$(\ddot{x}, \ddot{y}) + \frac{2k}{m}(x - Lcos(\omega t), y - Lsin(\omega t)) = 0$$

Δηλαδή το σύστημα των διαφορικών που έχουμε είναι το παρακάτω:

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2kL}{m}\cos(\omega t)$$

$$\ddot{y} + \frac{2k}{m}y = \frac{2kL}{m}\sin(\omega t)$$

(5)

Κάθε μια είναι γραμμική $2^{ης}$ τάξης, μη ομογενής. Παίρνουμε την πρώτη με x(t).

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2kL}{m}\cos(\omega t)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 + \frac{2k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{2k}{m}}$$

(6)

Οπότε η λύση της ομογενούς είναι σύμφωνα με τον κανόνα De'Moivre:

$$x_{o\mu} = A\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + Bsin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)$$

(7)

Υποθέτουμε μερική λύση την $x_{\mu\varepsilon\rho} = Ccos(\omega t)$. Τότε έχουμε:

$$-\omega^2 C + \frac{2k}{m}C = \frac{2kL}{m} \Rightarrow C = \frac{2kL}{2k - m\omega^2}$$

(8)

Έτσι τελικά η λύση της αρχικής διαφορικής είναι:

$$x = Acos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + Bsin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \frac{2kL}{(2k - m\omega^2)}\cos(\omega t)$$

(9)

Με την αντίστοιχη λογική η λύση για την y(t) θα είναι:

$$y = \Gamma\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \Delta\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \frac{2kL}{2k - m\omega^2}\sin(\omega t)$$

(10)

Οι εξισώσεις (9) και (10) αντιστοιχούν στην σχετική θέση των σωμάτων. Για τις σχετικές ταχύτητες των σωμάτων θα έχουμε με παραγώγιση:

$$\dot{x} = -A\sqrt{\frac{2k}{m}}sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + B\sqrt{\frac{2k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \frac{2kL\omega}{m\omega^2 - 2k}\sin(\omega t)$$

(11)

Αντίστοιχα για την y(t) θα έχουμε:

$$\dot{y} = -\Gamma\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \Delta\sqrt{\frac{2k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \frac{2kL\omega}{2k - m\omega^2}\cos(\omega t)$$

(12)

Από τις (9), (10), (11) και (12) μπορούν να καθοριστούν και οι σταθερές Α,Β,Γ,Δ βάσει των αρχικών συνθηκών.

Έστω για παράδειγμα ότι υποθέτουμε πως τα σώματα είναι αρχικά ακίνητα στο άξονα x και το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος L. Έστω ότι εκτοξεύουμε με ταχύτητα υ στον άξονα y, το σώμα Σ1. Τότε έχουμε από τις (9) και (11):

$$B = 0$$

$$A = L - \frac{2kL}{2k - m\omega^2}$$

(13)

Αντίστοιχα από την (10) και (12) έχουμε:

$$\Gamma = 0$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{m}{2k}}\left(\upsilon - \frac{2kL\omega}{2k - m\omega^2}\right)$$

(14)

Φυσικά το ω καθορίζεται και αυτό από τις αρχικές συνθήκες και είναι:

$$\omega = \frac{\upsilon}{L}$$

Έτσι λοιπόν θα έχουμε το νέο σύστημα σχετικών θέσεων:

$$x = Acos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \frac{2kL}{2k - m\omega^2}\cos(\omega t)$$

$$y = \Delta \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \frac{2kL}{2k - m\omega^2}\sin(\omega t)$$

(15)

Αντίστοιχα η σχετικές ταχύτητες των σωμάτων θα είναι:

$$\dot{x} = -A\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \frac{2kL\omega}{m\omega^2 - 2k}\sin(\omega t)$$

$$\dot{y} = \Delta\sqrt{\frac{2k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + \frac{2kL\omega}{2k - m\omega^2}\cos(\omega t)$$

(16)

Όπου τώρα πια οι σταθερές Α,Β,Γ,Δ και ω είναι καθορισμένες βάσει των δοσμένων αρχικών συνθηκών.

Παρατηρούμε τα εξής:

- Τόσο η σχετική θέση όσο και η σχετική ταχύτητα των σωμάτων, εξαρτάται από το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Πράγμα αναμενόμενο αφού ανάλογα με το μήκος η μεταξύ απόσταση θα είναι είτε μεγάλη είτε μικρή.
- Η λύσεις είναι περιοδικές, οπότε ακολουθείται μια περιοδική σχετική κίνηση των σωμάτων. Το ελατήριο συσπειρώνεται και επιμηκύνεται περιοδικά.
- Οι λύσεις είναι άνω φραγμένες, οπότε υπάρχει μέγιστη και ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σωμάτων η οποία συμβαίνει σε ορισμένες στιγμές t.
- Λόγω της περιοδικότητας, το φαινόμενο επαναλαμβάνεται έως να διαταραχθεί το μοντέλο αυτό. Δηλαδή το φαινόμενο συνεχίζει χωρίς να φθίνει.