

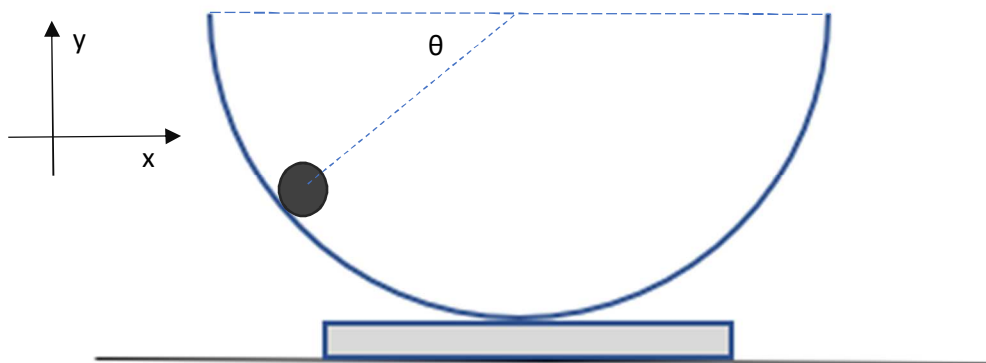
Σώμα σε κινούμενο ημικύκλιο

Τερλεμές Σπύρος

25-10-2020

spyrosssterlemes@gmail.com

Έστω ότι έχουμε ένα σημειακό σώμα μάζας m και ένα ημικύκλιο μάζας $M=m/2$ και ακτίνας r , που στο κάτω μέρος του έχει κολλημένη (προσαρμοσμένη) μια επίπεδη βάση μάζας $M=m/2$ και μπορεί έτσι να κινείται οριζοντίως χωρίς τριβές. Όλες οι κατανομές μάζας είναι ομογενή. Αφήνουμε το σώμα m (από την άκρη A) να κινηθεί εντός του ημικυκλίου. Στην ανάρτηση μελετάται η κίνηση του συστήματος και οι απαραίτητες συνθήκες ισορροπίας.



Έστω x η οριζόντια θέση του σώματος m και X η οριζόντια θέση του κέντρου μάζας του ημικυκλίου και της βάσης. Τότε έχουμε ότι το κέντρο μάζας του συστήματος:

$$x_{cm} = \frac{mx + \frac{m}{2}X + \frac{m}{2}X}{m + \frac{m}{2} + \frac{m}{2}} = \frac{x + X}{2}$$

(1)

Θεωρούμε ότι όλες οι συντεταγμένες είναι συναρτήσεις του χρόνου. Παραγωγίζουμε:

$$\dot{x}_{cm} = \frac{(\dot{x} + \dot{X})}{2}$$

(2)

Όμως ισχύει:

$$X = x + r\cos\theta \Rightarrow \dot{X} = \dot{x} - r\sin\theta\dot{\theta}$$

(3)

Αντικαθιστώντας την σχέση (3) στην (2) παίρνουμε την κάθε έκφραση της οριζόντιας παραγώγου κάθε σώματος, συναρτήσει της οριζόντιας ταχύτητας του κέντρου μάζας. Δηλαδή:

$$\dot{x} = \dot{x}_{cm} + \frac{r}{2} \sin\theta \dot{\theta} \quad \text{και} \quad \dot{X} = \dot{x}_{cm} - \frac{r}{2} \sin\theta \dot{\theta}$$

(4)

Επίσης για το σώμα m είναι:

$$y = r - r \sin\theta \Rightarrow \dot{y} = -r \cos\theta \dot{\theta}$$

(5)

Οι σχέσεις (4) και (5) δίνουν τις ταχύτητες κάθε σώματος ως συνάρτηση της ταχύτητας του κέντρου μάζας, της γωνίας θ , και της παραγώγου της.

Ορίζουμε τώρα την Lagrangian του συστήματος L:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} M \dot{X}^2 - mgy$$

(6)

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (4) και (5):

$$L = \frac{1}{2} m \left(2\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} m r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 - mgr(1 - \sin\theta)$$

$$L = m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + mgr \sin\theta + C$$

$$L = m\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{4} m r^2 (1 + \cos^2 \theta) \dot{\theta}^2 + mgr \sin\theta + C$$

(7)

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial x_{cm}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cm}} \right) \Rightarrow \ddot{x}_{cm} = 0 \quad (A. \Delta. O)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} m r^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\theta}^2 + mgr \cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} m r^2 (1 + \cos^2 \theta) \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -m r^2 \cos\theta \sin\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 (1 + \cos^2 \theta) \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right)$$

Οπότε συνδυάζοντας τις 3 τελευταίες εξισώσεις προκύπτει:

$$\frac{1}{2}mr^2(1 + \cos^2 \theta)\ddot{\theta} - mr^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2}mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}mr^2(1 + \cos^2 \theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mr^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 = mgr\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}r(1 + \cos^2 \theta)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}r\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$$

(8)

Ολοκληρώνουμε την (8) πολλαπλασιάζοντας με την παράγωγο της θ :

$$\frac{1}{2}r(1 + \cos^2 \theta)\dot{\theta}^2 = g\sin\theta$$

(9)

Οπότε έχουμε:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g\sin\theta}{r(1 + \cos^2 \theta)}}$$

(10)

Από την (10) μπορούμε να βρούμε τον χρόνο που χρειάζεται το σώμα m για να διαγράψει γωνία θ , ο οποίος δίνεται από το αριθμητικά υπολογιζόμενο ολοκλήρωμα:

$$t = \int_0^\theta \sqrt{\frac{r(1 + \cos^2 \theta)}{2g\sin\theta}} d\theta = \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_0^\theta \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \theta}{\sin\theta}} d\theta$$

(11)

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να μας δώσουν ότι πληροφορία θέλουμε για τις κινήσεις των σωμάτων, όσο όμως οι τιμές της γωνίας θ είναι τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τα πεδία ορισμού. Δηλαδή θα υπάρξει κάποια γωνία θ στην οποία η οριζόντια ισορροπία του σώματος θα αλλάξει. Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν έως το πλευρικό όριο της γωνίας αυτής.