Ταλάντωση με τριβή

Σώμα μάζας m ηρεμεί στο σημείο O οριζόντιου δαπέδου. Το σώμα είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος – δαπέδου είναι μ και ταυτίζεται με το συντελεστή οριακής τριβής. Εκτρέπουμε το σώμα κατά τον άξονα του ελατηρίου κατά A_0 και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί.

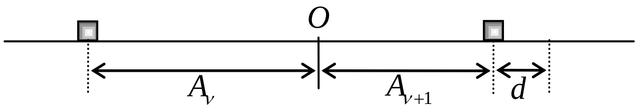
Α. Να βρείτε για ποιες τιμές του συντελεστή τριβής μ το σώμα θα ακινητοποιηθεί στο σημείο Ο.

Β. Υπολογίστε το διάστημα που διανύει το κινητό και το χρόνο κίνησης για κάθε μια από τις τιμές του συντελεστή τριβής του ερωτήματος Α.

Γ. Βρείτε τη θέση που τελικά θα ακινητοποιηθεί το σώμα για οποιαδήποτε τυχαία τιμή του συντελεστή τριβής.

Λύση

Α. Η κίνηση του σώματος θα είναι εν γένει παλινδρομική γύρω από το σημείο Ο με μέγιστες



απομακρύνσεις έστω $A_0, A_1, A_2, ..., A_N$, μέχρι να σταματήσει $\left(A_N = 0\right)$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – ενέργειας για την κίνηση του σώματος από την τυχαία θέση μέγιστης απομάκρυνσης A_ν μέχρι την επόμενη θέση $A_{\nu+1}$ έχουμε,

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T = 0$$

ή

$$\frac{1}{2}kA_\nu^2 - \frac{1}{2}kA_{\nu+1}^2 - \mu mg\left(A_\nu + A_{\nu+1}\right) = 0$$

ή

$$\left(A_\nu + A_{\nu+1}\right)\left(A_\nu - A_{\nu+1}\right) = \frac{2\mu mg}{k}\left(A_\nu + A_{\nu+1}\right)$$

ή

$$\boxed{A_\nu - A_{\nu+1} = \frac{2\mu mg}{k}} \qquad (1)$$

Συμπέρασμα: *Η μείωση του πλάτους σε κάθε "ημιπερίοδο" της κίνησης είναι σταθερή, και ίση με,*

$$d = \frac{2\mu mg}{k} \qquad (2)$$

Για να ικανοποιείται η απαίτηση του προβλήματος είναι προφανές ότι πρέπει να ισχύει,

$$A_0 = Nd \qquad (3)$$

όπου N ακέραιος και εκφράζει το πλήθος των "ημιταλαντώσεων" που θα εκτελέσει το σώμα μέχρι να ακινητοποιηθεί. Αντικαθιστώντας την έκφραση του d από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε,

$$A_0 = N\frac{2\mu mg}{k}$$

ή

$$\boxed{\mu = \frac{kA_0}{2mg}\frac{1}{N}} \tag{4}$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι σωστό εφόσον η κίνηση του σώματος δεν σταματά σε οποιαδήποτε από τις ακραίες θέσεις στις οποίες το σώμα ακινητοποιείται στιγμιαία, κάτι το οποίο εξασφαλίζεται αν η δύναμη του ελατηρίου είναι μεγαλύτερη από την οριακή τριβή σε κάθε μια από τις ακραίες θέσεις. Πρέπει δηλαδή, $kA_\nu > \mu mg$ για κάθε ακέραιο $\nu < N$.

Αλλά $A_\nu = A_0 - \nu d$, οπότε πρέπει,

$$k\left(A_0 - \nu d\right) > \mu mg$$

ή λαμβάνοντας υπόψη τις (3) και (4),

$$A_0 - \nu\frac{A_0}{N} > \frac{A_0}{2N}$$

ή

$$N - \nu > \frac{1}{2}$$

που ισχύει πάντα αφού N, ν ακέραιοι με $\nu < N$. Άρα η κίνηση του σώματος δεν θα σταματήσει σε καμία από τις ακραίες θέσεις και θα ακινητοποιηθεί στη θέσει Ο για κάθε τιμή του συντελεστή τριβής που δίνεται από την εξ. (4).

Β. *Υπολογισμός του συνολικού διαστήματος*

Το συνολικό διάστημα θα δίνεται από τη σχέση,

$$S = A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{N-1} A_\nu$$

αφού την απόσταση A_ν για $\nu > 0$, το κινητό τη διανύει δύο φορές. Αντικαθιστώντας το A_ν, έχουμε,

$$S = A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{N-1}\left(A_0 - \nu d\right)$$

ή

$$S = A_0 + 2\left(A_0\left(N-1\right) - d\sum_{\nu=1}^{N-1}\nu\right)$$

ή λόγω της (3),

$$S = A_0 + 2A_0\left((N-1) - \frac{(N-1)}{2}\right)$$

και κάνοντας τις πράξεις,

$$\boxed{S = NA_0} \qquad (5)$$

Αλλά επειδή η **διατήρηση της ενέργειας** κάνει τη ζωή μας πιο εύκολη, μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής:

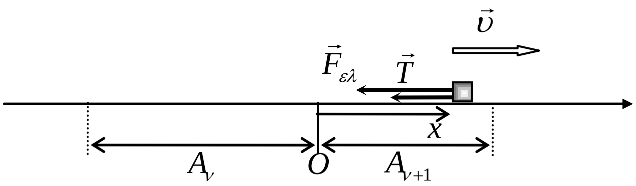
Η αρχική ενέργεια του συστήματος που είναι η αποθηκευμένη ενέργεια στο ελατήριο μετατρέπεται σε θερμική μέσω του έργου της τριβής. Άρα,

$$\frac{1}{2}kA_0^2 = \mu mgS$$

και λαμβάνοντας υπόψη την (4)

$$S = NA_0$$

Υπολογισμός του συνολικού χρόνου κίνησης.



Έστω x τυχαία απομάκρυνση του σώματος από τη θέση O. Θεωρώντας θετική φορά την φορά της κίνησης του σώματος, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό είναι,

$$\sum \vec{F} = -kx - \mu mg$$

Αλλάζοντας μεταβλητή θέσης ως, $X = x + \dfrac{\mu mg}{k}$, η προηγούμενη σχέση γίνεται,

$$\sum \vec{F} = -kX$$

(Στην ίδια σχέση καταλήγουμε και κατά την κίνηση του σώματος προς την αρνητική κατεύθυνση με τη διαφορά ότι η κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής είναι $X = x - \dfrac{\mu mg}{k}$ *αφού η τριβή έχει θετική κατεύθυνση)*

Άρα η κίνηση του σώματος είναι αρμονική γύρω από τη θέση $X=0$ με περίοδο $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Δηλαδή η χρονική διάρκεια της κίνησης, από την μία ακραία θέση μέχρι την επόμενη είναι σταθερή και ίση με,

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

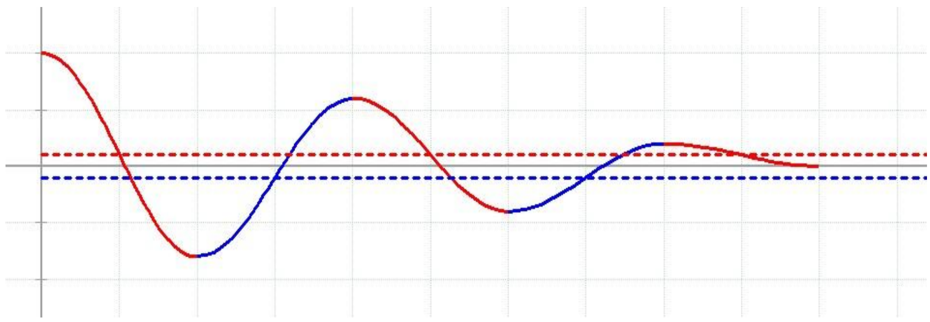
Συνεπώς ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι,

$$\boxed{t_{o\lambda}=N\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

<u>Παρατηρήσεις.</u>

- Η μείωση του πλάτους είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου.
- Τα χρονικά διαστήματα είναι ίσα για την μετάβαση από οποιαδήποτε ακραία θέση στην επόμενη αλλά **<u>δεν</u>** ισχύει το ίδιο για τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών διελεύσεων από το σημείο O .
- Η κίνηση του σώματος μπορούμε να πούμε ότι είναι «συρραφή» τμημάτων αρμονικών ταλαντώσεων που πραγματοποιούνται γύρω από διαφορετικές θέσεις ισορροπίας.

  Κατά την κίνηση προς τη θετική κατεύθυνση γύρω από τη θέση $x=-\dfrac{\mu mg}{k}$, ενώ κατά την αρνητική κατεύθυνση γύρω από τη θέση $x=+\dfrac{\mu mg}{k}$. Στο παρακάτω διάγραμμα θέσης – χρόνου για $N=5$, τα κόκκινα τμήματα είναι ημιταλαντώσεις γύρω από την θέση που απεικονίζεται με την κόκκινη διακεκομμένη γραμμή και το αντίστοιχο για τα μπλε τμήματα.



Γ. Για μια τυχαία τιμή του συντελεστή τριβής διαφορετική από τις τιμές της εξίσωσης (4) μπορούμε και πάλι να βρούμε τη θέση όπου το σώμα θα σταματήσει. Αυτό θα συμβεί όταν,

$$kA_{\nu}\leq\mu mg$$

ή

$$k\left(A_0 - \nu d\right) \le \mu mg$$

ή

$$\nu \ge \frac{A_0}{d} - \frac{1}{2}$$

Άρα το σώμα θα σταματήσει σε απόσταση από το σημείο O,

$$x_f = \left| A_0 - \left[\frac{A_0}{d} + \frac{1}{2}\right] d \right|$$

όπου ο συμβολισμός $\left[x\right]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος του αριθμού. Η θέση εκκίνησης και η θέση ακινητοποίησης του σώματος, θα είναι είτε από την ίδια πλευρά του σημείου O αν $\left[\frac{A_0}{d}\right]$ άρτιος, ενώ θα είναι εκατέρωθεν του σημείου O αν $\left[\frac{A_0}{d}\right]$ περιττός.

Σπύρος Χόρτης

spirosch123@gmail.com