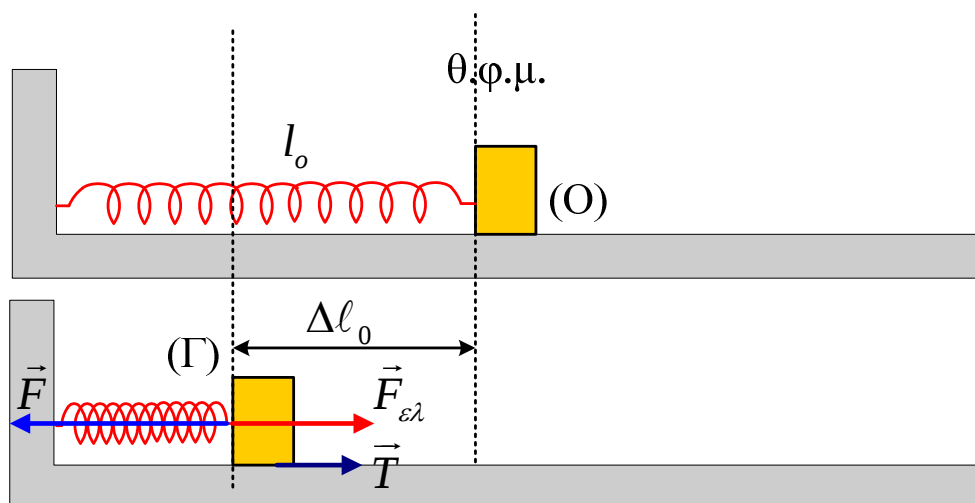


Φθίνουσα ταλάντωση λόγω τριβής

Σώμα μάζας $m=2\text{Kg}$ ηρεμεί δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Ασκούμε κατάλληλη δύναμη $\vec{F}$ οπότε το σώμα αρχίζει να μετακινείται πολύ αργά από τη θέση (Ο) μέχρι τη θέση (Γ), όπου το ελατήριο να συσπειρωθεί κατά $\Delta l_0 = 0,32\text{m}$. Ο συντελεστής οριακής τριβής μεταξύ σώματος και δαπέδου έχει τιμή $\mu_s=0,5$.



Α) Να εκφράσετε το μέτρο της δύναμης F σε συνάρτηση με τη συσπίρωση του ελατηρίου Δl από τη θέση φυσικού μήκους, $F = f(\Delta l)$, κατά τη διάρκεια της κίνησης ΟΓ και να υπολογίσετε τη δαπανώμενη ενέργεια για τη μετατόπιση αυτή.

Κάποια στιγμή αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί.

Β) Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα, μέχρι αυτή να μηδενιστεί για πρώτη φορά;

Γ) Σε πόση απόσταση x από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου θα σταματήσει το σώμα;

Δ) Ποια η απώλεια μηχανικής ενέργειας, από τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερο το σώμα και μέχρι να σταματήσει;

Ε) Ο καθηγητής Φυσικής κύριος Ιντερακτιβάκης Προσομοιωσίδης αφού υπολόγισε τους χρόνους κίνησης ζήτησε από τους μαθητές ερμηνεία αυτών

Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

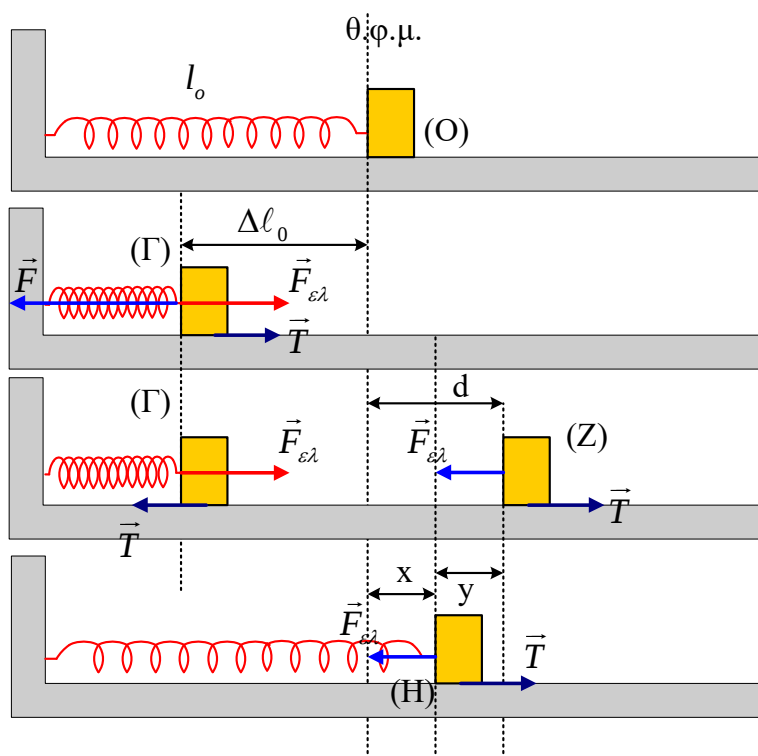
Για να αρχίσει το σώμα να κινείται από τη θέση (Ο) φυσικού μήκους του ελατηρίου, πρέπει να ασκήσουμε δύναμη $F \geq T_{op} = \mu_s mg = T_{ολ} \Rightarrow F \geq 10\text{N}$

Αμέσως μετά, το ελατήριο αρχίζει να συσπειρώνεται και να ασκεί στο σώμα δύναμη με φορά προς τη θέση φυσικού μήκους του και μέτρου: $F_{ελ} = k\Delta l$.

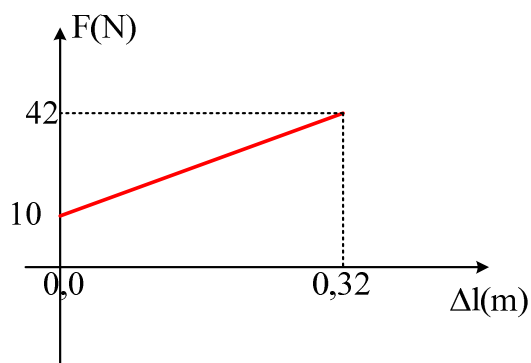
Για να κινείται το σώμα πολύ αργά, πρέπει σε κάθε θέση:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - T_{ολ} - F_{ελ} = 0 \Rightarrow F = T_{ολ} + F_{ελ} \Rightarrow F = 10 + 100\Delta l (\text{S.I})$$

όπου $0 \leq \Delta l \leq 0,32\text{m}$



Η δαπανώμενη ενέργεια είναι ίση με το έργο της δύναμης F κατά τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση (Ο) μέχρι τη θέση (Γ):



Το έργο της δύναμης F είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση: $W_F = \frac{10+42}{2} \cdot 0,32 J \Rightarrow W_F = 8,32 J$

Ισοδύναμα τη δαπανώμενη ενέργεια την υπολογίζουμε με εφαρμογή ΘΜΚΕ μεταξύ των θέσεων (Ο) και (Γ):

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_{F_{ελ}} + W_T \Rightarrow 0 - 0 = W_F + 0 - \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 - T\Delta l_0 \Rightarrow$$

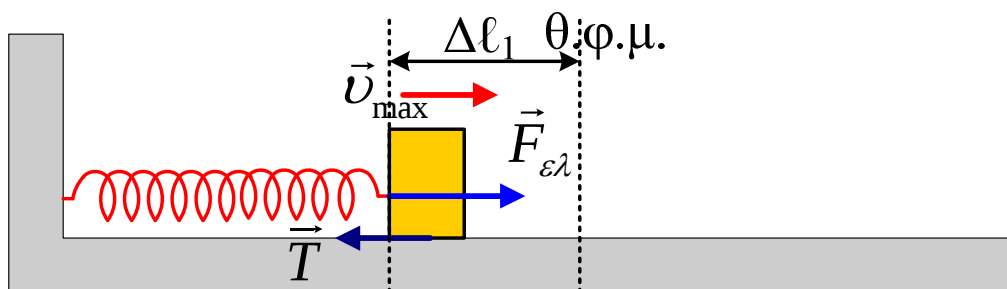
$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 + T\Delta l_0 \Rightarrow W_F = 8,32 J$$

Β) Μόλις αφήσουμε το σώμα ελεύθερο η $\vec{F}_{ελ}$ τείνει να επαναφέρει το σώμα προς τη θέση φμ του ελατηρίου. Η στατική τριβή εμποδίζει την έναρξη της κίνησης, όμως:

$F_{ελ} = k\Delta l_0 \Rightarrow F_{ελ} = 32 N > T_{ορ} = 10 N$, οπότε το σώμα αρχίζει να επιταχύνεται κινούμενο προς τη θέση φμ του ελατηρίου.

Το σώμα αποκτά μέγιστη κινητική ενέργεια στη θέση που αποκτά μέγιστη ταχύτητα, στη θέση δηλαδή που παύει να επιταχύνεται και αρχίζει να επιβραδύνεται, στη θέση όπου:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} = -\vec{T} \Rightarrow F_{ελ} = T \Rightarrow k\Delta l_1 = \mu_s mg \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1 m$$



Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από την αρχική θέση συσπείρωσης του ελατηρίου κατά $\Delta l_0 = 0,32 m$ στη θέση όπου το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $\Delta l_1 = 0,1 m$ έχουμε:

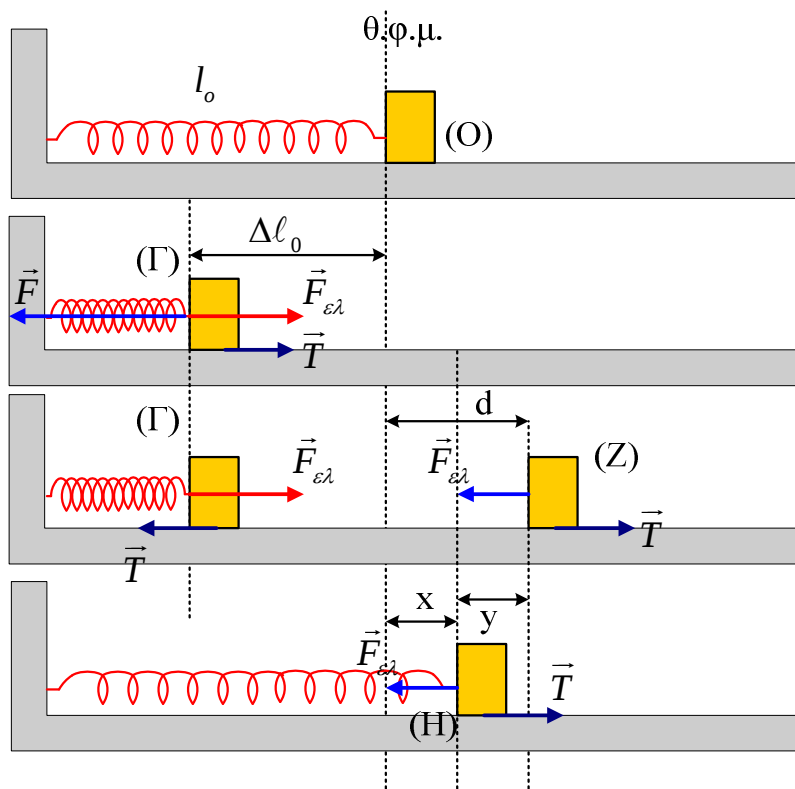
$$K_{\max} - K_{αρχ} = W_{F_{ελ}} + W_T \Rightarrow K_{\max} - 0 = \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_1^2 - T(\Delta l_0 - \Delta l_1) \Rightarrow K_{\max} = 2,42 J$$

Γ) Ελέγχουμε αν το σώμα ξεπεράσει τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από τη θέση $\Delta l_0 = 0,32 m$ μέχρι τη θέση φυσικού μήκους:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\epsilon\lambda}} + W_T \Rightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} - 0 = \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 - 0 - T\Delta l_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} = 5,12J - 3,2J \Rightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} = 1,92J$$

Εφόσον έχει κινητική ενέργεια, συνεχίζει να κινείται μέχρι τη θέση (Z) όπου μηδενίζεται η ταχύτητα για πρώτη φορά και το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά d:



ΘΜΚΕ από (Γ) σε (Z):

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{\epsilon\lambda}} + W_T \Rightarrow 0 - 0 = \left(\frac{1}{2}k\Delta l_0^2 - \frac{1}{2}kd^2\right) - T(\Delta l_0 + d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 5,12 - 50d^2 - 3,2 - 10d \Rightarrow 50d^2 + 10d - 1,92 = 0$$

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε $d=0,12\text{m}$ και $d=-0,32\text{m}$. Προφανώς δεκτή είναι η λύση $d=0,12\text{m}$.

Μετά το στιγμιαίο μηδενισμό της ταχύτητας, η $\vec{F}_{\epsilon\lambda}$ τείνει να επαναφέρει το σώμα προς τη θέση φμ του ελατηρίου. Η τριβή ολίσθησης μετατρέπεται σε στατική και εμποδίζει την κίνηση. Ελέγχουμε αν το σώμα αρχίσει ξανά να κινείται: $F_{\epsilon\lambda} = kd \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = 12\text{N} > T_{op} = 10\text{N}$. Οπότε, το σώμα αρχίζει να επιταχύνεται προς τη θέση φμ του ελατηρίου.

Ελέγχουμε αν το σώμα ξεπεράσει τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από τη θέση $d = 0,12m$ μέχρι τη θέση φυσικού μήκους:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T \Rightarrow K_{\text{τελ}} - 0 = \frac{1}{2}kd^2 - 0 - Td \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{\text{τελ}} = 0,72J - 1,2J \Rightarrow K_{\text{τελ}} = -0,48J$$

Εφόσον η κινητική ενέργεια προκύπτει αρνητική, συμπεραίνουμε ότι το σώμα δεν θα φθάσει ποτέ στη θέση φμ του ελατηρίου, αλλά θα ακινητοποιηθεί πριν από αυτή. Έστω ότι σταματά στη θέση (Η) αφού διανύσει απόσταση y από τη θέση (Ζ):

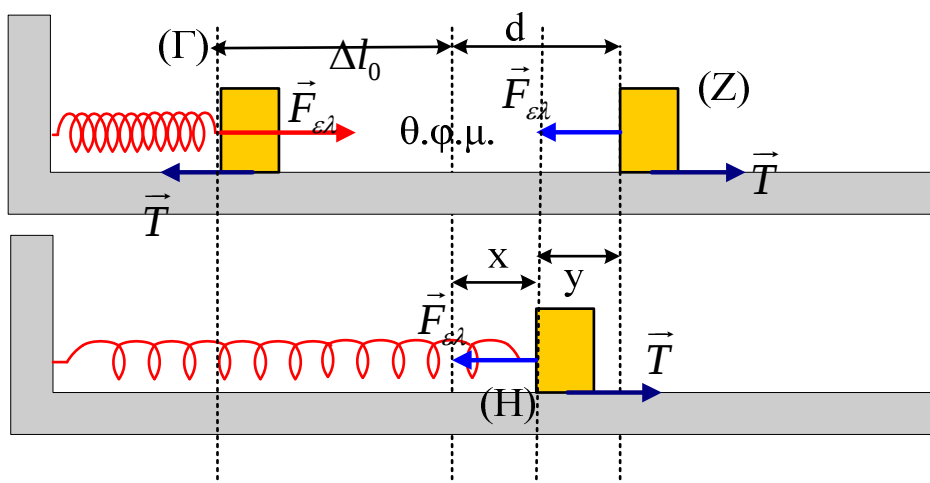
ΘΜΚΕ από (Ζ) σε (Η):

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T \Rightarrow 0 - 0 = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k(d-y)^2 - Ty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}ky^2 + kdy - Ty \Rightarrow 50y^2 - 2y = 0 \Rightarrow 2y(25y - 1) = 0$$

Η τελευταία δίνει λύσεις $y=0$ και $y=0,04m$.

Δηλαδή η ταχύτητα μηδενίζεται στη θέση (Η), όπου το ελατήριο έχει επιμήκυνση $x=0,08m$. Στη θέση αυτή ακινητοποιείται αφού: $F_{\varepsilon\lambda} = kx \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 8N < T_{op} = 10N$



Στη διάρκεια της κίνησης από το (Ζ) στο (Η) απέκτησε μέγιστη κινητική ενέργεια στη θέση όπου το ελατήριο είχε επιμηκυνθεί:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{ελ} = -\vec{T} \Rightarrow F_{ελ} = T \Rightarrow k\Delta l_2 = \mu_s mg \Rightarrow \Delta l_2 = 0,1m$$

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από την αρχική θέση όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $d = 0,12m$ στη θέση όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta l_2 = 0,1m$ έχουμε:

$$K_{\max} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{F_{ελ}} + W_T \Rightarrow K_{\max} - 0 = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_1^2 - T(d - \Delta l_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{\max} = 0,72 - 0,5 - 0,02J \Rightarrow K_{\max} = 0,02J$$

Βλέπουμε ότι η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά πριν η ταχύτητα μηδενιστεί για δεύτερη φορά, είναι πολύ μικρότερη αυτής που απέκτησε πριν η ταχύτητα μηδενιστεί για πρώτη φορά, κάτι αναμενόμενο αφού σε όλη τη διάρκεια της κίνησης έχουμε απώλεια ενέργειας....

Δ) Η απώλεια μηχανικής ενέργειας, από τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερο το σώμα και μέχρι αυτό να σταματήσει, υπολογίζεται από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{τελ} + |\Delta E| \Rightarrow |\Delta E| = E_{\alpha\rho\chi} - E_{τελ} \Rightarrow |\Delta E| = \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\Delta E| = 5,12J - 0,32J \Rightarrow |\Delta E| = 4,8J$$

Ισοδύναμα, η απώλεια μηχανικής ενέργειας, από τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερο το σώμα και μέχρι αυτό να σταματήσει είναι ίση με την απόλυτη τιμή του έργου της τριβής:

$$|W_T| = T(\Delta l_0 + d + y) \Rightarrow |W_T| = 10N \cdot (0,32 + 0,12 + 0,04)m \Rightarrow |W_T| = 4,8J$$

Ε) Ο καθηγητής Φυσικής κύριος Ιντερακτιβάκης Προσομοιωσίδης υπολόγισε τους χρόνους κίνησης και βρήκε ό,τι το χρονικό διάστημα κίνησης από την αρχική θέση (Γ) στη θέση πρώτου μηδενισμού της ταχύτητας (Ζ) είναι ίσο με το χρονικό διάστημα κίνησης από την θέση (Ζ) στη θέση δεύτερου μηδενισμού της ταχύτητας (Η), όπου και το σώμα ακινητοποιείται:

$$\Delta t_{\Gamma \rightarrow Z} = \Delta t_{Z \rightarrow H} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi\sqrt{2}}{10}s, \text{ οπότε ο συνολικός χρόνος κίνησης}$$

$$\text{είναι: } \Delta t_{\Gamma \rightarrow H} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{10}s$$

Ο καθηγητής κύριος Ιντερακτιβάκης Προσομοιωσίδης ζήτησε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν το δεδομένο αυτό.

Οι μαθητές απάντησαν ότι παρόλο που στη διαδρομή $\Gamma \rightarrow Z$, η απόσταση που διανύει το σώμα $0,32+0,12=0,44\text{m}$ είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση που διανύει στη διαδρομή $Z \rightarrow H$ $0,04\text{m}$, αυτό είναι εφικτό αφού στη διαδρομή $\Gamma \rightarrow Z$ αποκτά στιγμιαία μεγαλύτερες επιταχύνσεις και ταχύτητες απ' ότι στη διαδρομή $Z \rightarrow H$. Κάποιος δε επισήμανε ότι κάτι ανάλογο συμβαίνει τόσο στην ελεύθερη αρμονική ταλάντωση όσο και στην εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση, όπου ανεξάρτητα του πλάτους, σε ίδια συστήματα ταλαντωτών, π.χ: σώμα στο άκρο ιδανικού ελατηρίου, οι περίοδοι των κινήσεων μπορούν να έχουν ίδιες τιμές.....

Μετά από αυτή την απάντηση ο καθηγητής κύριος Ιντερακτιβάκης Προσομοιωσίδης αισθάνθηκε απόλυτα δικαιωμένος για την επιλογή χρήσης των ΤΠΕ στη διδασκαλία του....

Θοδωρής Παπασγουρίδης

papasgou@gmail.com