

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΡΟΥΣΕΙΣ (2)

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

ΘΕΜΑ Α

(Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Μία απάντηση σωστή)

A1. Δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά. Αν με $K_{αρχ}$ και $K_{τελ}$ συμβολίσουμε τις ολικές κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση τους, αντίστοιχα τότε το πηλίκο $K_{τελ} / K_{αρχ}$ παίρνει

- α. τη μέγιστη τιμή του όταν η κρούση είναι ελαστική.
- β. τη μέγιστη τιμή του όταν η κρούση είναι ανελαστική.
- γ. τη μέγιστη τιμή του όταν η κρούση είναι πλαστική.
- δ. ίδια τιμή για όλα τα είδη των κρούσεων.

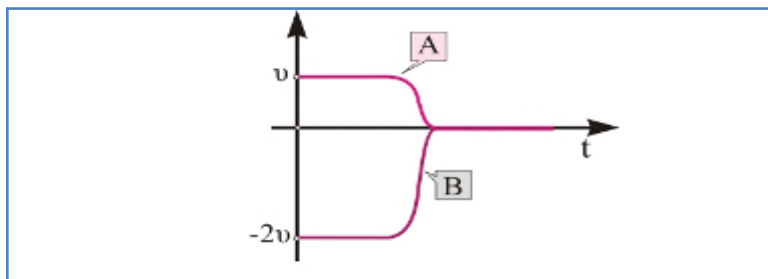
(Μονάδες 5)

A2. Όταν δύο σώματα ίσης μάζας συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά τότε ανταλλάσσουν

- α. μόνο τις ταχύτητες τους
- β. μόνο τις ορμές τους
- γ. μόνο τις κινητικές του ενέργειες
- δ. και τις ταχύτητές και τις κινητικές ενέργειες και τις ορμές τους

(Μονάδες 5)

A3. Δύο σφαίρες A, B που κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούονται κεντρικά πλαστικά. Στο διπλανό διάγραμμα δείχνονται οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση. Αν p_A και p_B είναι οι αλγεβρικές τιμές των ορμών των σφαιρών πριν την κρούση, αυτές συνδέονται με τη σχέση



α. $p_B = 2p_A$,

β. $p_B = -2p_A$,

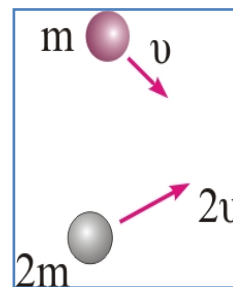
γ. $p_B = -p_A$,

δ. $p_B = p_A$

(Μονάδες 5)

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

A4. Ένα σώμα μάζας m κινούμενο με ταχύτητα μέτρου v συγκρούεται πλάγια και ανελαστικά με δεύτερο σώμα μάζας $2m$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου $2v$ όπως στο σχήμα. Κατά τη διάρκεια της κρούσης τιμή ίση με μηδέν έχει η



- α. ολική ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων.
- β. μεταβολή της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων.
- γ. μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των δύο σωμάτων.
- δ. μέση δύναμη που ασκείται στο σώμα μάζας m .

(Μονάδες 5)

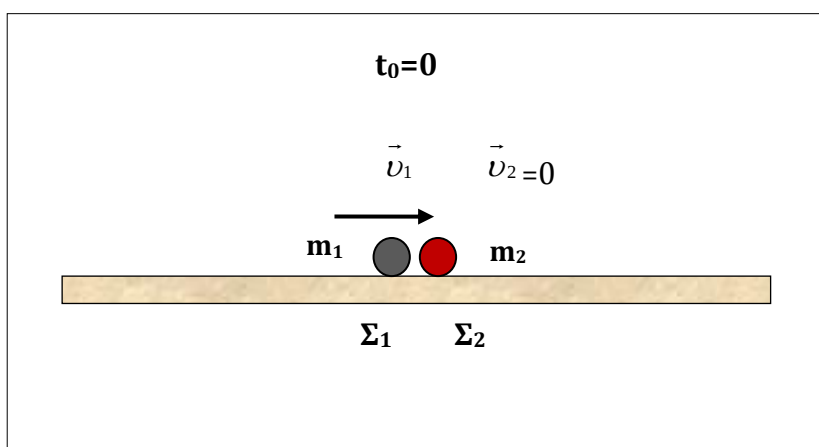
A5. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με το γράμμα (Σ) αν είναι σωστή και με το γράμμα (Λ) αν είναι λανθασμένη

- α. Κατά την ανελαστική κρούση δύο σωμάτων, η ενέργεια του συστήματος μειώνεται.
- β. Στην ελαστική κρούση, κάθε σώμα διατηρεί την κινητική του ενέργεια.
- γ. Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων, μέρος ή όλη η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα.
- δ. Στις ανελαστικές κρούσεις μεταξύ δύο σωμάτων, η ορμή του συστήματος των σωμάτων μειώνεται.
- ε. Έκκεντρη ονομάζεται η κρούση στην οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται σχηματίζουν τυχαία διεύθυνση.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

B1. Μικρή ομογενής σφαίρα Σ_2 μάζας m_2 ηρεμεί στο σημείο Α μη λείου οριζόντιου επιπέδου. Δεύτερη σφαίρα Σ_1 , ίσης ακτίνας με αυτή της Σ_2 που έχει μάζα m_1 , κινείται πάνω στο μη λείο οριζόντιο επίπεδο. Τα δύο σώματα εμφανίζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης (μ) με το οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή η σφαίρα Σ_1



συγκρούεται κεντρικά με την ακίνητη σφαίρα Σ_2 . Ελάχιστα πριν την κρούση η ταχύτητα της Σ_1 έχει μέτρο v_1 . Αν η κρούση των δύο σφαιρών είναι κεντρική -ελαστική, μετά την κρούση αυτές κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και ακινητοποιούνται οριστικά σε σημεία Β και Γ

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

του απέχουν απόσταση S το καθένα από το σημείο όπου έγινε η κρούση. Εάν η κρούση των δύο σωμάτων ήταν κεντρική-πλαστική, το συσσωμάτωμα ($\Sigma_1-\Sigma_2$) θα ακινητοποιεί οριστικά σε απόσταση ίση με:

α. $\frac{S}{4}$

β. $\frac{S}{8}$

γ. $\frac{S}{16}$

I. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

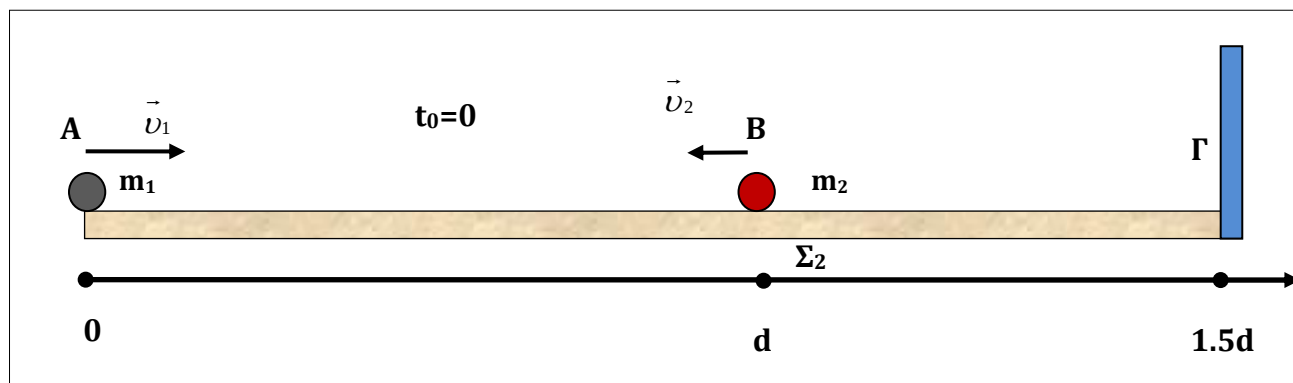
(Μονάδες 2)

II. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 6)

B2. Δύο σφαιρικά ομογενή σώματα Σ_1 και Σ_2 ίδιας ακτίνας και ίσων μαζών $m_1 = m_2 = m$ ηρεμούν πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο στις θέσεις A και B όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση

των δύο σημείων είναι ίση με d . Σε απόσταση $\frac{d}{2}$ από τη σφαίρα B και δεξιά από αυτή βρίσκεται



ται λείος κατακόρυφους τοίχος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ εκτοξεύουμε τις δύο σφαίρες με οριζόντιες ταχύτητες $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$, έτσι ώστε να κινούνται η μία προς την άλλη. Για τα μέτρα των ταχυτήτων αυτών ισχύει $u_1 = 3u_2$. Τη χρονική στιγμή t_1 οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.

I. Η απόσταση των δυο σφαιρών τη χρονική στιγμή $2t_1$ να είναι:

α. $\frac{d}{2}$

β. $\frac{3d}{2}$

γ. d

I. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

(Μονάδες 2)

II. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 6)

(ή εναλλακτικά)

II. Η απόσταση των δυο σφαιρών τη χρονική στιγμή $4t_1$ να είναι:

α. 0

β. $\frac{3d}{2}$

γ. $2d$

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

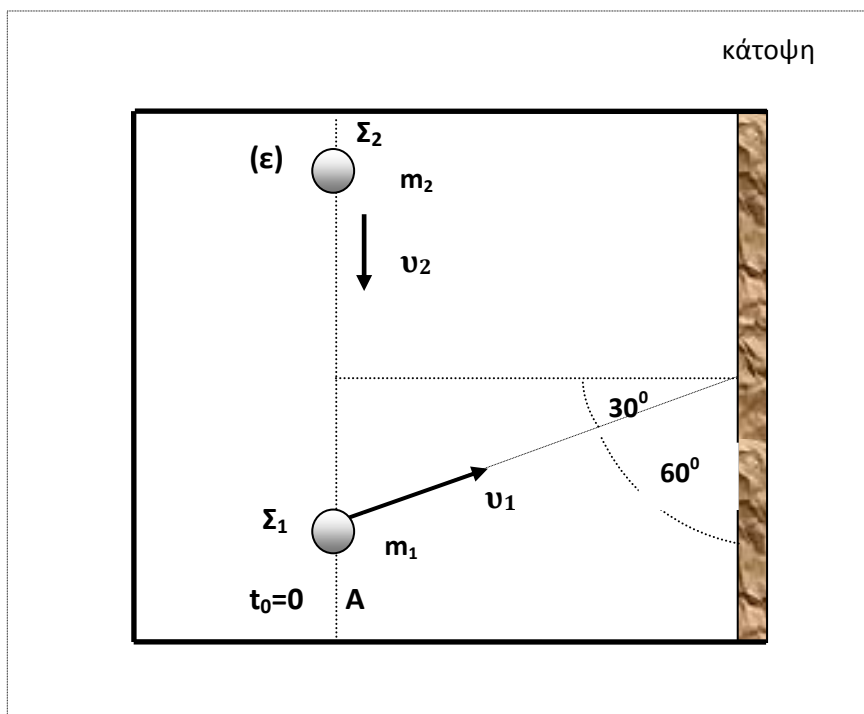
I. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

(Μονάδες 2)

II. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 6)

B3. Μία σφαίρα Σ_1 μάζας m_1 ηρεμεί στο σημείο A ενός λείου επιπέδου. Θεωρούμε την ευθεία (ϵ) η οποία περνάει από το A και είναι παράλληλη στον κατακόρυφο λείο τοίχο που φαίνεται στο σχήμα. Κάποια στιγμή την οποία θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t_0=0$) δίνουμε στην σφαίρα αρχική ταχύτητα μέτρου v_1 έτσι ώστε η διεύθυνση της να σχηματίζει γωνία 60° με το επίπεδο του τοίχου. Διαπιστώνουμε ότι το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 η σφαίρα συναντά πάλι την



ευθεία (ϵ) . Τη στιγμή αυτή συγκρούεται πλάγια με δεύτερη σφαίρες Σ_2 μάζας m_2 , η οποία κινείται παράλληλα προς τον τοίχο και πάνω στην ευθεία (ϵ) με ταχύτητα μέτρου v_2 . Το σώμα Σ_1 τη χρονική στιγμή $t_2 = 2 t_1$ διέρχεται από το σημείο A κινούμενο παράλληλα προς τον τοίχο. Μετά την κρούση το σώμα Σ_2 έχει ταχύτητα της οποίας η διεύθυνση είναι κάθετη στον τοίχο και η φορά της είναι τέτοια ώστε να απομακρύνεται από τον τοίχο. Τρίτη κρούση της σφαίρας Σ_1 δεν μεσολαβεί μέχρι τη στιγμή αυτή. Αν K_2 η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 ελάχιστα πριν την κρούση και K'_2 η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 αμέσως μετά την κρούση ο, λόγος $\frac{K'_2}{K_2}$ έχει τιμή

Η ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 ελάχιστα πριν την κρούση έχει μέτρο :

α. $\frac{K'_2}{K_2} = \frac{3}{4}$

β. $\frac{K'_2}{K_2} = \frac{4}{3}$

γ. $\frac{K'_2}{K_2} = \frac{1}{3}$

I. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

(Μονάδες 2)

II. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1=0,1 \text{ kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{u}_1$. Κάποια στιγμή συναντά και συγκρούεται κεντρικά με ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας m_2 το οποίο είναι δεμένο στο άκρο κατάκórυφου αβαρούς νήματος μήκους ℓ , το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε οροφή. Το Σ_1 διαπερνά το σώμα Σ_2 και βγαίνει από αυτό με ταχύτητα $\vec{u}_1'$. Η κρούση τελειώνει στη θέση που αρχίζει. Στη συνέχεια το σώμα Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με σώμα Σ_3 όπως φαίνεται στο σχήμα. Το Σώμα Σ_3 έχει μάζα m_3 και ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,5$. Το συσσωμάτωμα των Σ_1 - Σ_3 αφού διανύσει απόσταση d πάνω στο οριζόντιο δάπεδο συναντά τη βάση λείου τεταρτοκύκλιου ακτίνας $R=0,9 \text{ m}$, κινείται κατά μήκος αυτού και ηρεμεί στιγμιαία σε μία θέση (Ζ) η οποία βρίσκεται ψηλότερα κατά $0,45 \text{ m}$ από το οριζόντιο δάπεδο. Το συσσωμάτωμα Σ_1 - Σ_3 , τη στιγμή ακριβώς κατά την οποία μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά του στη θέση (Ζ), δέχεται από το τεταρτοκύκλιο δύναμη μέτρου $N_f=10 \text{ N}$. Στη συνέχεια αυτό επιστρέφει στη βάση του τεταρτοκύκλιου και αφού κινηθεί κατά μήκος του οριζόντιου δαπέδου σταματάει οριστικά σε σημείο (Θ) που απέχει απόσταση d_1 από τη βάση του τεταρτοκύκλιου.

Το σώμα Σ_2 που είναι δεμένο στο άκρο του κατακόρυφου νήματος, μετά την κρούση του με το Σ_1 , κινείται κατά μήκος περιφέρειας κύκλου ακτίνας $r=\ell$, στο κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το νήμα, και τη στιγμή που το νήμα γίνεται οριζόντιο έχει ταχύτητα $\vec{u}_f$. Η μεταβολή που έχει υποστεί η ορμή του σώματος Σ_2 κατά την κίνηση του από τη θέση (Α), όπου συνέβη η κρούση μέχρι την θέση (Γ), όπου το νήμα γίνεται οριζόντιο, έχει μέτρο $|\Delta \vec{p}|=10 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$. Τη

στιγμή κατά την οποία το νήμα γίνεται οριζόντιο το Σ_2 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ_4 , το οποίο είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100 \text{ N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο ακλόνητα σε οροφή (σχήμα β). Κατά την κρούση το νήμα σπάει, (χωρίς η θραύση του να έχει κάποια επίδραση στο αποτέλεσμα της κρούσης το οποίο είναι το ίδιο με αυτό, αν δεν υπήρχε το νήμα και τα σώματα ερχόταν σε επαφή με τις ταχύτητες που τώρα έρχονται). Αμέσως μετά την κρούση το σώμα Σ_2 έχει μηδενική ταχύτητα και το σώμα Σ_4 , αφού διανύσει απόσταση $0,1 \text{ m}$ ηρεμεί στιγμιαία στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας

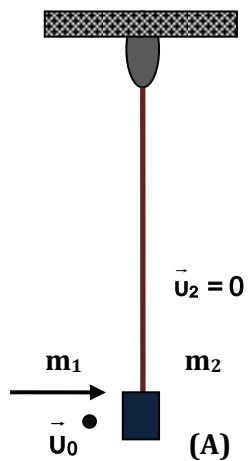
$$g=10 \text{ m/s}^2$$

Ζητούνται:

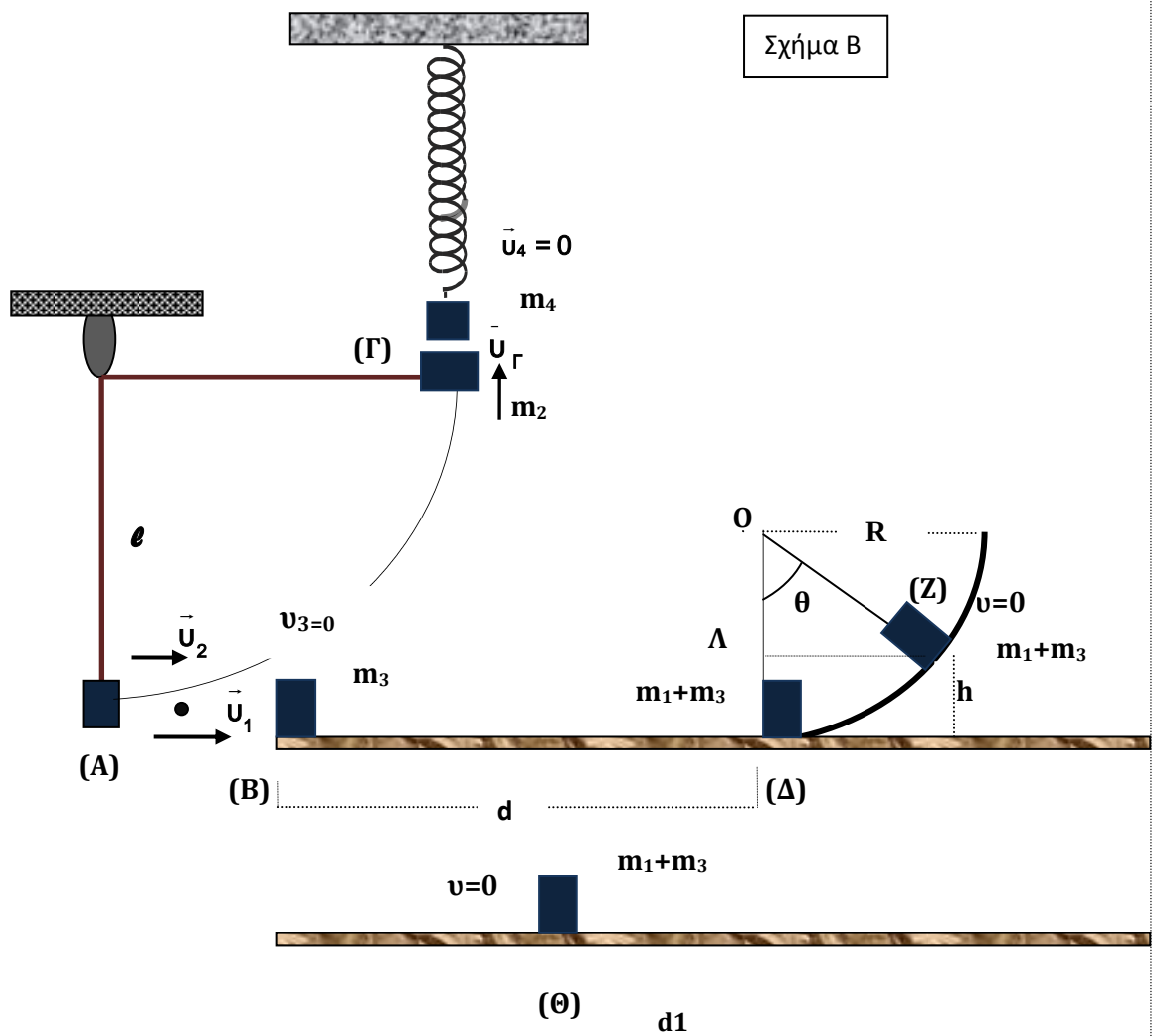
Γ1. Να βρεθεί η μάζα m_3 του σώματος Σ_3 .

(Μονάδες 4)

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις



Σχήμα α



Γ2. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος Σ_1 - Σ_3 εξαιτίας της κίνησης του στο τεταρτοκύκλιο. (Μονάδες 4)

Γ3. Αν ο συνολικός χρόνος κίνησης του συσσωματώματος πάνω στο μη λείο οριζόντιο δάπεδο είναι $\Delta t_{\text{ολ}} = 1\text{s}$ να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. (Μονάδες 3)

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

Γ4. Να υπολογίσετε τη μάζα m_2 του σώματος Σ_2 , καθώς και την ταχύτητα του στο σημείο στο οποίο σπάει το νήμα, αν είναι γνωστό τη στιγμή που συμβαίνει αυτό το ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής βαρυτικής ενέργειας του σώματος Σ_2 είναι $\left(\frac{dU_{\text{βαρ}}}{dt}\right)_r = 60 \frac{\text{J}}{\text{s}}$. (Μονάδες 5)

Γ5. Να υπολογίσετε το μήκος του νήματος καθώς και τη δύναμη που ασκεί αυτό στο σώμα Σ_2 ελάχιστα πριν σπάσει (δηλαδή την στιγμή που το νήμα γίνεται οριζόντιο) (Μονάδες 6)

Γ6. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση του με το σώμα Σ_2 , η οποία μετατράπηκε σε θερμότητα (θερμική ενέργεια) λόγω τριβών, κατά την συνολική κίνηση του συσσωματώματος $\Sigma_1 - \Sigma_3$. (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ

Κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνιά κλίσης $\varphi = 30^\circ$. Στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι στερεωμένο, το κάτω άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου είναι ελεύθερο. Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος όπως φαίνεται στο σχήμα. Σε απόσταση d_1 από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, βρίσκεται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο σώμα Σ_2 , μάζας $m_2 = 2 \text{ Kg}$, το οποίο ηρεμεί. Σε απόσταση d από το σώμα Σ_2 ηρεμεί, επίσης πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, δεύτερο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 2 \text{ Kg}$. Τα δύο σώματα εμφανίζουν με το κεκλιμένο επίπεδο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Κάποια στιγμή δίνουμε στο σώμα

Σ_1 ταχύτητα $\vec{u}_0$ παράλληλη προς το κεκλιμένο με φορά προς τα κάτω κατάλληλου μέτρου ώστε η αρχική κινητική ενέργειά του να είναι ίση με 3J . Το σώμα αυτό αφού διανύσει διάστημα ίσο με d συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ_2 . Κατά την κρούση το συσσωμάτωμα δεν μετατοπίζεται και όταν ολοκληρωθεί αυτό κινείται προς τα κάτω και έρχεται σε επαφή με το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, το οποίο αρχίζει συσπειρώνει. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των δύο σωμάτων και του κεκλιμένου, από τη θέση όπου αρχικά ηρεμεί το σώμα

Σ_1 και μέχρι τη θέση που αντιστοιχεί στο φυσικό του ελατηρίου είναι $\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Από τη θέση φυσικού μήκους και μέχρι την βάση του κεκλιμένου ο συντελεστής τριβής ολίσθησης έχει τιμή ίσο με το μισό της τιμής που είχε πριν, δηλαδή τιμή $\mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Δίνεται ακόμη το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

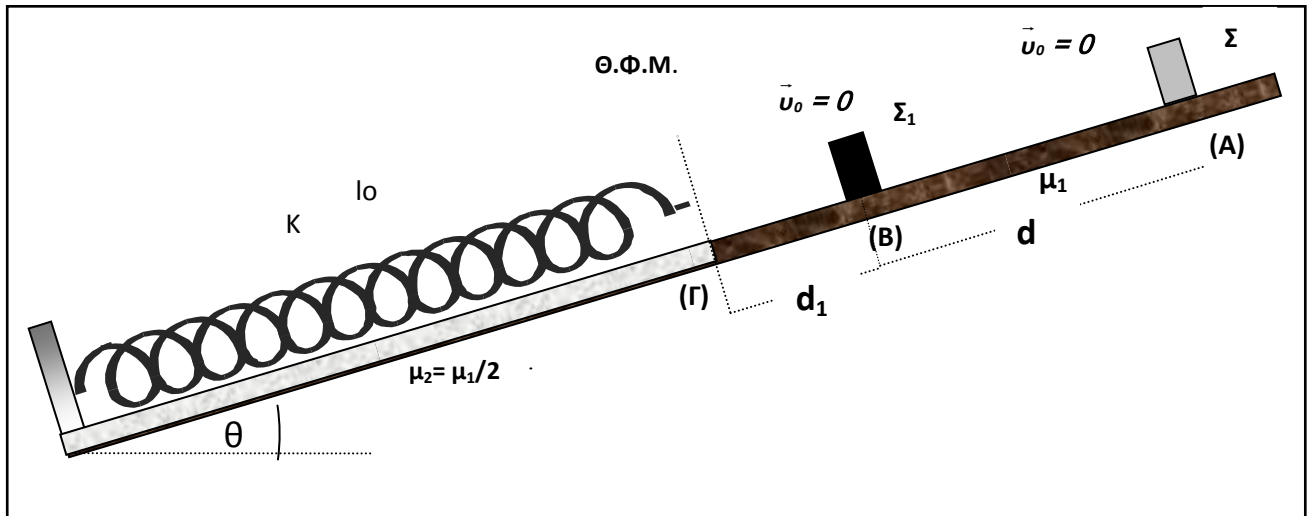
Ζητούνται:

Δ1. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος ($\Sigma_1 - \Sigma_2$) τη στιγμή κατά την οποία αυτό έρχεται σε επαφή με το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. (Μονάδες 5)

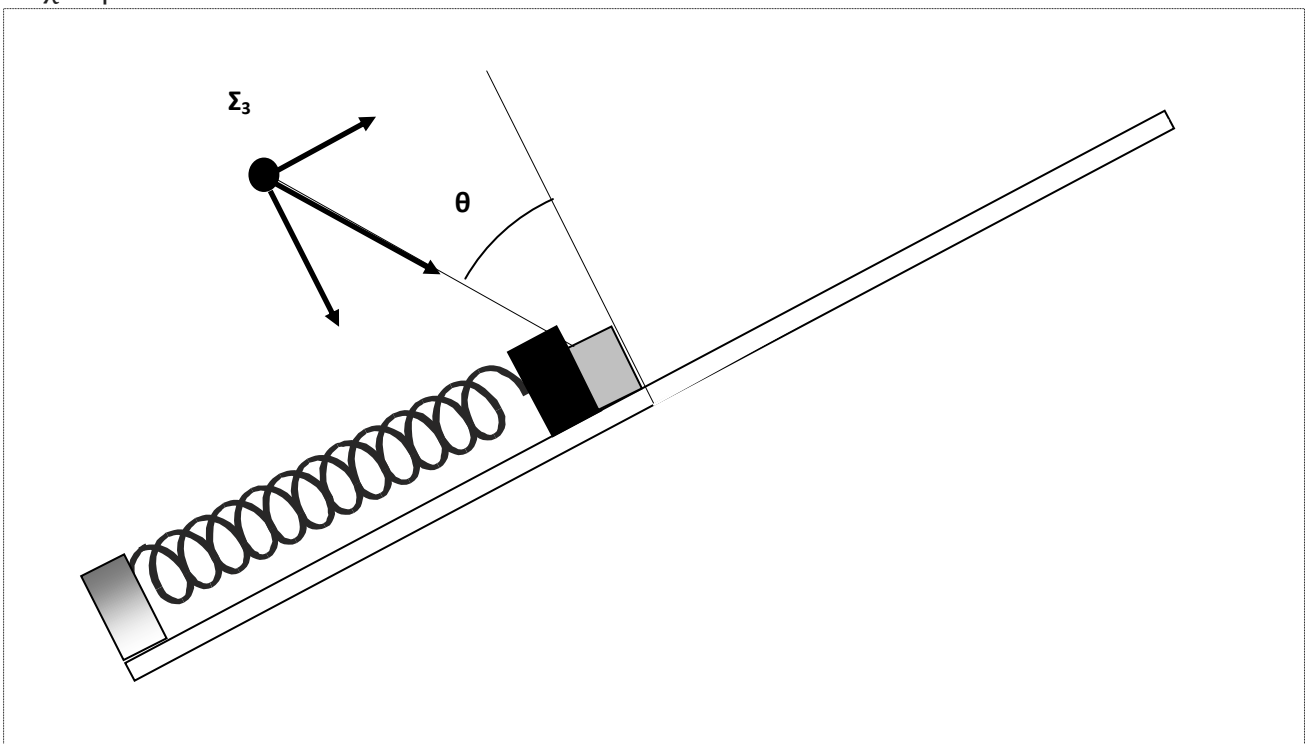
Δ2. Να εξηγήσετε αναλυτικά γιατί το συσσωμάτωμα κάποια στιγμή αποκτά μέγιστη ταχύτητα και να προσδιοριστεί η θέση όπου συμβαίνει αυτό. (Μονάδες 4)

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

Δ3. Να υπολογιστεί το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας που αποκτά το συσσωμάτωμα, καθώς και ο ρυθμός με τον οποίον παράγει έργο η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο συσσωμάτωμα, τη στιγμή κατά την οποία αποκτάται η μέγιστη ταχύτητα. (Μονάδες 5)



Τη στιγμή κατά την οποία μεγιστοποιείται η ταχύτητα του συσσωματώματος ένα τρίτο σώμα Σ_3 μάζας $m_3=2\text{Kg}$ που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα μέτρου u_3 , συγκρούεται πλαστικά με το συσσωμάτωμα ($\Sigma_1-\Sigma_2$). Η διεύθυνση $\vec{u}_3$ σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση του άξονα $y'y$, ο οποίος είναι κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο. Για την γωνία θ δίνονται $\eta\mu\theta=0.8$ **συν $\theta=0,6$** . Αμέσως μετά την ολοκλήρωση της κρούσης το νέο συσσωμάτωμα έχει μηδενική ταχύτητα.



Δ4. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας $\vec{u}_3$.

(Μονάδες 5)

Δ5. Αν η κρούση των $\Sigma_3, (\Sigma_1-\Sigma_2)$ διαρκεί χρόνο $\Delta t=0.01\text{s}$, να βρεθεί το μέτρο της κάθετης δύναμης την οποία το κεκλιμένο επίπεδο ασκεί στο νέο συσσωμάτωμα κατά την διάρκεια της

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

κρούσης. Να θεωρήσετε ότι αυτή η κάθετη δύναμη είναι σταθερή σε όλη την διάρκεια της κρούσης. (Μονάδες 6)

mandravellis@gmail.com

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

ΘΕΜΑ Α

A1.α

A2.δ

A3.γ

A4.β

A5. α - Λ , β - Λ , γ - Σ , δ - Λ , ε - Λ ,

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή απάντηση η (γ)

Εύκολα με Θ.Μ.Κ.Ε προκύπτει

$$S_1 = \frac{v_1'^2}{2\mu g} = S \quad (\alpha)$$

και

$$S_2 = \frac{v_2'^2}{2\mu g} = S \quad (\beta)$$

(α) , (β)

$$S_1 = S_2$$

άρα

$$v_1'^2 = v_2'^2$$

$$v_1' = v_2'$$

ή

$$v_1' = -v_2'$$

είναι προφανές ότι

$$v_1' = -v_2'$$

καθώς τα δύο σώματα αμέσως μετά την κρούση κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

η κρούση είναι πλαστική και έχουμε:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \rightarrow m_1 - m_2 = -2m_1 \rightarrow 3m_1 = m_2 \quad (\gamma)$$

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

Εάν η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική η αρχή διατήρησης της ορμής γράφεται

$$\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ} \rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) V_K \rightarrow v_1 = 4V_K \rightarrow V_K = \frac{v_1}{4}$$

$$m_2 = 3m_1$$

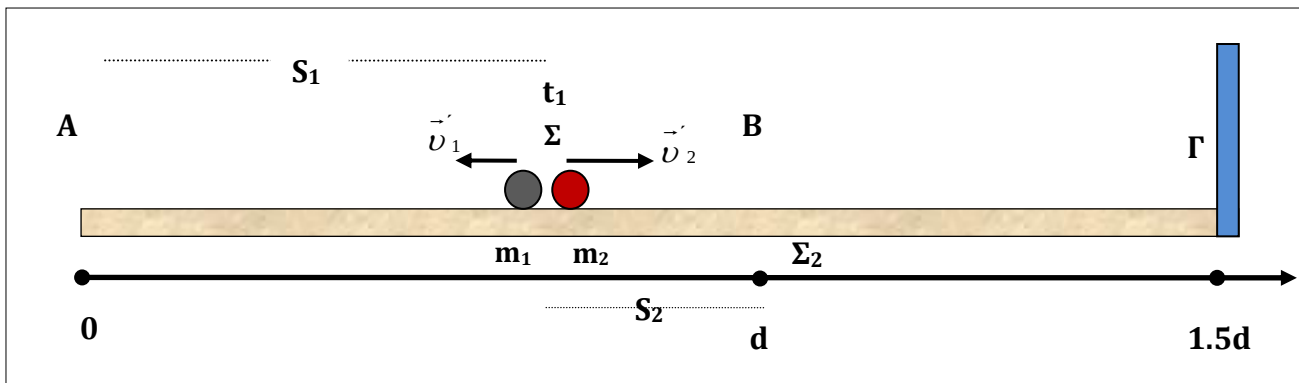
και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε για το συσσωμάτωμα έχουμε:

$$S_{\text{συσ}} = \frac{V_K^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{v_1}{4}\right)^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{v_1^2}{16}\right)}{2\mu g} = \frac{v_1^2}{32\mu g} \quad (\delta)$$

από (α) και (δ) προκύπτει ότι $S_{\text{συσ}} = \frac{S}{16} \quad (\epsilon)$

B2. Σωστή απάντηση η (α)

Το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα τριπλάσιου μέτρου από το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 . Έτσι τη στιγμή που συναντώνται τα δύο σώματα, το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα



Σ_1 είναι τριπλάσιο από το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα Σ_2 .

$$S_1 = 3S_2$$

Ακόμη $S_1 + S_2 = d \rightarrow 3S_2 + S_2 = d \rightarrow 4S_2 = d \rightarrow S_2 = v_2 t_1 = \frac{d}{4} \quad (\sigma\tau)$

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

$$\text{και} \quad S_1 = v_1 t_1 = 3v_2 t_1 = 3 \frac{d}{4} \quad (\zeta)$$

Εφόσον οι μάζες των σωμάτων είναι ίσες και η κρούση κεντρική και ελαστική τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Επομένως μετά την κρούση

$$v'_1 = v_2 \quad \text{και} \quad v'_2 = v_1 \quad (\eta)$$

$$\text{άρα} \quad v'_1 = v_2 \quad \text{και} \quad v'_2 = 3v_2 \quad (\theta)$$

v_1, v_2, v'_1, v'_2 είναι μέτρα των αντίστοιχων ταχυτήτων

Από την στιγμή t_1 έως τη στιγμή $4t_1$ το σώμα Σ_1 διανύει διάστημα $S'_1 = v'_1 3t_1$ και αν ληφθεί

$$\text{υπόψη η σχέση } (\theta) \quad S'_1 = v_2 3t_1 = 3v_2 t_1 = 3S_2 = 3 \frac{d}{4} \quad (\iota)$$

$S'_1 = 3 \frac{d}{4}$ και το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=0$, δηλαδή έχει επιστρέψει στην αρχική του θέση

$$\text{το } \Sigma_2 \text{ διανύει συνολικό διάστημα } S'_2 = v'_2 3t_1 = 3v_1 t_1 = 3S_1 = 3\left(3 \frac{d}{4}\right) = 9 \frac{d}{4} \quad (\ια)$$

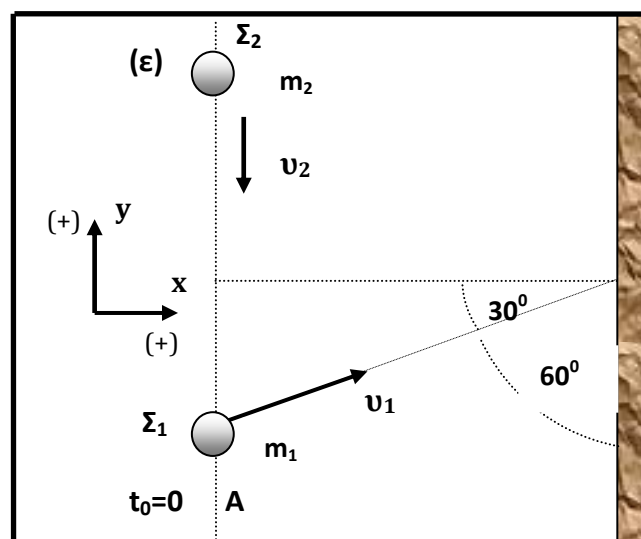
Επομένως :

Σε απόσταση $3 \frac{d}{4}$ από το σημείο της κρούσης συνάντησε τον τοίχο, συγκρούστηκε κεντρικά ελαστικά με αυτόν, αντιστράφηκε η κατεύθυνση της ταχύτητάς του, διατηρήθηκε το μέτρο της και στη συνέχεια κινήθηκε προ της αρχής του άξονα διανύοντας διάστημα $6 \frac{d}{4} = 1,5d$ και

την χρονική στιγμή $4t_1$ φτάνει στη θέση που αντιστοιχεί στην αρχή του άξονα συγχρόνως με την άφιξη στην ίδια θέση του σώματος Σ_1 .

B3. Σωστή απάντηση η (β)

Θεωρούμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων xOy όπως φαίνεται στο σχήμα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σώμα Σ_1 πραγματοποιεί μία σύνθετη κίνηση αποτελούμενη από μία ευθύγραμμη ομαλή κατά τη



2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

διεύθυνση της ευθείας (ε) με σταθερή ταχύτητα μέτρου

$$u_{1y} = u_1 \eta\mu 30^\circ$$

και μία από επίσης ευθύ--γραμμη ομαλή κατά τη διεύ-θυνση του άξονα $x'x$ με σταθερή ταχύτητα μέτρου

$$u_{1x} = u_1 \sigma\upsilon\nu 30^\circ$$

Όταν χτυπήσει η σφαίρα στον τοίχο αντιστρέφεται η ταχύτητα $\vec{v}_{1x}$ καθώς η κρού-ση κατά την διεύθυνση αυ-τού του άξονα, ανάμεσα στο σώμα μάζας m_1 και τον τοίχο είναι κεντρική και ελαστική και ο τοίχος είναι ακίνητος με πολύ μεγάλη μάζα. Μετά την κρούση λοιπόν το σώμα Σ_1 έχει κατά την διεύθυνση του άξονα $x'x$ ταχύτητα ίδιου μέτρου με αυτήν που είχε κατά την διεύθυνση του ίδιου άξονα πριν την κρούση .

Έστω B το σημείο της κρούσης των Σ_1, Σ_2 . Τότε η απόσταση AB διανύεται με ταχύτητα

$$u_{1y} = u_1 \eta\mu 30^\circ$$

σε χρόνο t_1 . Επειδή την χρονική στιγμή $2t_1$ το Σ_1 περνάει ξανά από το σημείο εκτόξευσης A κινού-μενο παράλληλα προς τον τοίχο ,καταλαβαίνουμε ότι κατά την κρούση του Σ_1 με το Σ_2 συνέβη αντι-στροφή της ταχύτητας u_{1y} του Σ_1 . Έτσι μετά την κρούση του Σ_1 με το Σ_2 η ταχύτητα του Σ_1 στον άξονα $y'y$ έχει το ίδιο μέτρο με αυτό που είχε πριν την κρούση κατά την διεύθυνση του ίδιου άξονα

Επίσης μετά την κρούση το των Σ_1, Σ_2 , το Σ_1 δεν έχει συνιστώσα ταχύτητας κατά την διεύθυνση του άξονα $x'x$

Το σώμα Σ_2 δεν είχε πριν τη κρούση ταχύτητα κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$ και μετά την κρούση κινείται κατά την διεύθυνση αυτού του άξονα με ταχύτητα u'_2 . Ισχύουν:

$$(x'x) \quad m_1 u_1 \eta\mu 30^\circ - m_2 u_2 = -m_1 u_1 \eta\mu 30^\circ$$

$$(y'y) \quad - m_1 u_1 \sigma\upsilon\nu 30^\circ = - m_2 u'_2$$

$$(x'x) \quad 2m_1 u_1 \eta\mu 30^\circ = m_2 u_2$$

$$(y'y) \quad m_1 u_1 \sigma\upsilon\nu 30^\circ = m_2 u'_2$$

$$u_2 = \frac{2m_1 \eta\mu 30^\circ}{m_2} \quad u'_2 = \frac{m_1 \sigma\upsilon\nu 30^\circ}{m_2}$$

$$\frac{u'_2}{u_2} = \frac{\frac{2m_1 u_1 \eta\mu 30^\circ}{m_2}}{\frac{2m_1 u_1 \sigma\upsilon\nu 30^\circ}{m_2}} = \frac{2\eta\mu 30^\circ}{2\sigma\upsilon\nu 30^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \left(\frac{u'_2}{u_2} \right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{u'_2}{u_2} \right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{K'}{K} = \left(\frac{v_2'}{v_2} \right)^2 = \left(\frac{4}{3} \right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Στο τρίγωνο ΟΛΖ :

$$\text{συν}\theta = \frac{R-h}{R} = \frac{0,9-0,45}{0,9} = \frac{0,45}{0,9} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Στη θέση (Ζ):

$$\Sigma F_{\text{ακτινικών}} = \frac{(m_1 + m_3)v_Z^2}{R} = \frac{(m_1 + m_3) \cdot 0}{R} = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_{\text{ακτινικών}} = T - w_y \quad (3)$$

$$(2),(3) \quad T - w_y = 0 \rightarrow T = w_y \rightarrow T = w \text{ συν } \theta \rightarrow T = (m_1 + m_3)g \text{ συν } \theta \rightarrow 10 = (m_1 + m_3)10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow (m_1 + m_3) = 2\text{Kg} \rightarrow \mathbf{m_3 = 1,9Kg} \quad (4)$$

Γ2. Υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου (σημείο Δ). Το τεταρτοκύκλιο είναι λείο και κατά συνέπεια η μηχανική ενέργεια του συσσωματώματος διατηρείται:

$$E_{\text{μηχ}(\Delta)} = E_{\text{μηχ}(Z)}$$

$$K_{(\Delta)} + U_{(\Delta)} = K_{(Z)} + U_{(Z)}$$

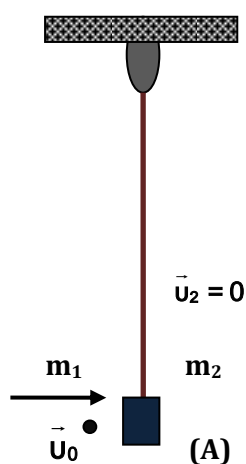
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_3)v_{\Delta}^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_3)gh \rightarrow \frac{1}{2}v_{\Delta}^2 = gh \rightarrow \frac{1}{2}v_{\Delta}^2 = 10 \cdot 0,45 \rightarrow \frac{1}{2}v_{\Delta}^2 = 10 \cdot 0,45$$

$$\rightarrow v_{\Delta}^2 = 9 \rightarrow v_{\Delta} = 3 \frac{m}{s} \quad (5)$$

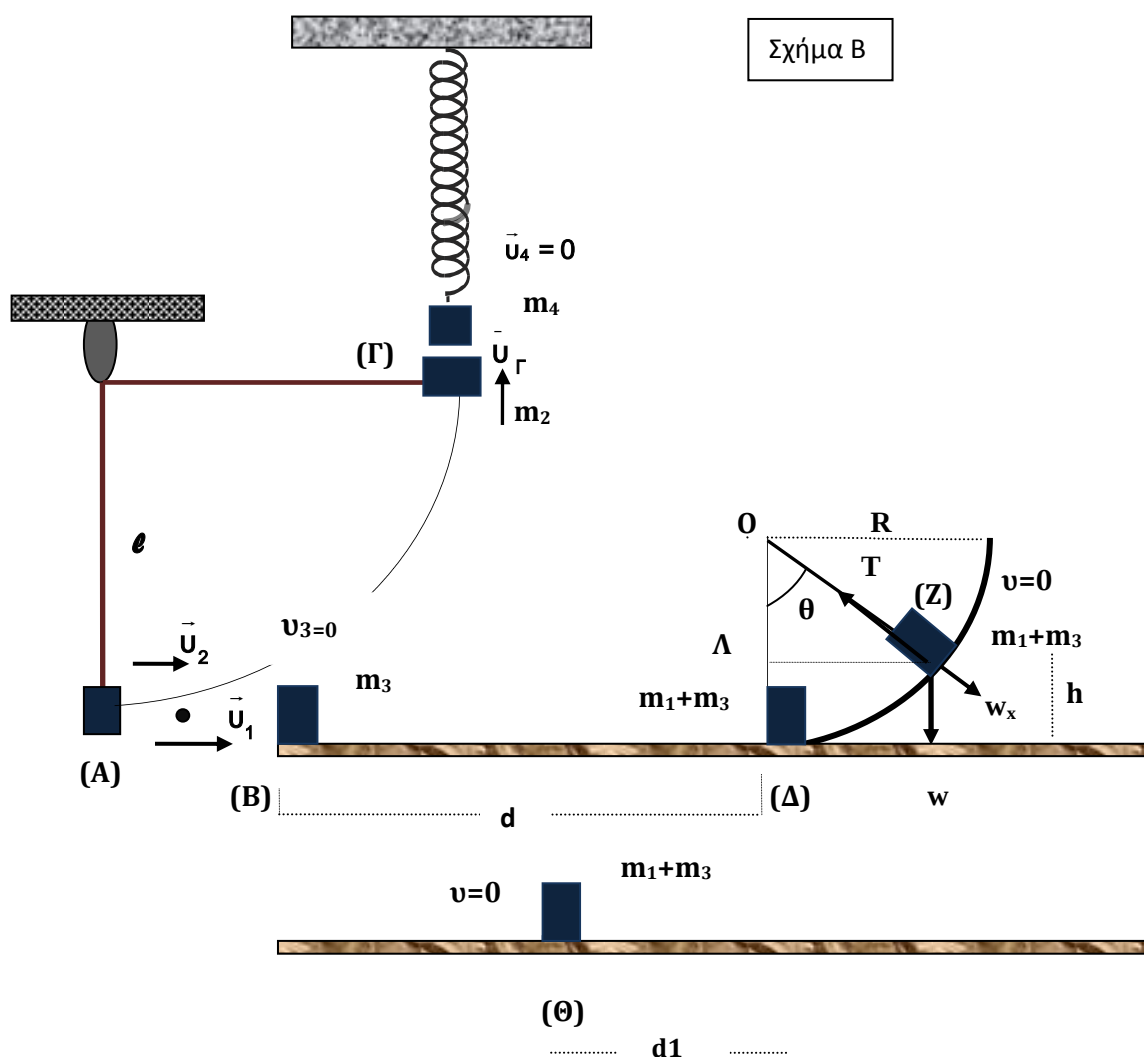
Επειδή το τεταρτοκύκλιο είναι λείο το συσσωμάτωμα επιστρέφει στη βάση του με ταχύτητα ίδιου μέτρου με αυτό που είχε η ταχύτητά του όταν άρχισε η άνοδος. Άρα $v_{\Delta} = 3 \frac{m}{s}$ (6)

Έτσι με θετική φορά του οριζόντιου άξονα προς τα δεξιά η μεταβολή της ορμής που συσσωματώματος γράφεται αρχικά διανυσματικά και κατόπιν αλγεβρικά:

$$\vec{\Delta p} = \vec{p}_{\Delta'} - \vec{p}_{\Delta} \rightarrow \Delta p = (-p_{\Delta'}) - p_{\Delta} = -2(m_1 + m_3)v_{\Delta} = -2(2)3 = \mathbf{-12 \frac{Kgm}{s}} \quad (6)$$



Σχήμα α



Γ3.Η κίνηση του συσσωματώματος από το Δ και μέχρι το Θ είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη και ισχύει:

$$0 = v'_{\Delta} - \alpha t_{\Delta\Theta} \rightarrow 0 = 3 - \alpha t_{\Delta\Theta} \quad (7)$$

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

$$\alpha = \frac{T}{(m_1 + m_3)} = \frac{\mu(m_1 + m_3)g}{(m_1 + m_3)} = \mu g = 0,5 \cdot 10 = 5 \frac{m}{s^2} \quad (8)$$

$$(7), (8) \quad 0 = 3 - 5t_{\Delta\theta} \rightarrow t_{\Delta\theta} = 0,6 \text{ s} \quad (9)$$

Η κίνηση του συσσωματώματος από το σημείο Β της κρούσης μέχρι την βάση του τεταρτοκύκλιου διαρκεί χρόνο:

$$t_{B\Delta} = 1 - 0,6 = 0,4 \text{ s} \quad (10)$$

είναι ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη και ισχύει:

$$v_{\Delta} = v_K - \alpha t_{B\Delta} \rightarrow 3 = v_K - 5 \cdot 0,4 \rightarrow v_K = 3 + 5 \cdot 0,4 \rightarrow v_K = 3 + 2 = 5 \frac{m}{s}$$

$$v_K = 5 \frac{m}{s} \quad (11)$$

Γ4. Το σώμα μάζας m_2 συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με το σώμα μάζας m_4 το οποίο ελάχιστα πριν την κρούση έχει μηδενική ταχύτητα. Αμέσως μετά την κρούση μηδενική ταχύτητα έχει το σώμα μάζας m_2 . Κατά την κρούση συνέβη ανταλλαγή ταχυτήτων οπότε η μάζες των σωμάτων Σ_2 και Σ_4 είναι ίσες.

$$m_2 = m_4 \quad (12)$$

Μετά την κρούση το σώμα Σ_4 κινείται προς τα πάνω κατά 0,1 m και ηρεμεί στιγμιαία στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αυτό σημαίνει ότι η παραμόρφωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του Σ_4 είναι 0,1m οπότε η συνθήκη ισορροπίας του Σ_4 πριν την κρούση γράφεται:

$$\Sigma F_4 = 0 \rightarrow F_{ελ} = m_4 g \rightarrow 100 \cdot 0,1 = m_4 10 \rightarrow m_4 = 1 \text{ Kg} \quad (13)$$

(12), (13)

$$m_2 = 1 \text{ Kg} \quad (14)$$

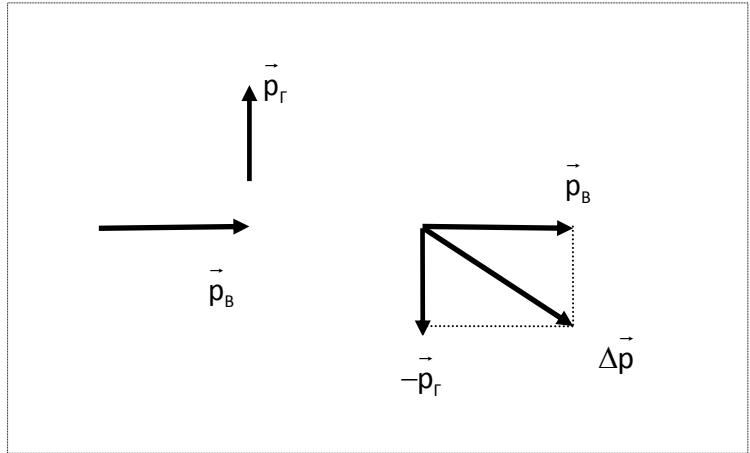
ρυθμός μεταβολής της δυναμικής βαρυτικής ενέργειας του Σ_2 τη στιγμή που σπάει το νήμα είναι

$$\left(\frac{dU_{\text{βαρ}}}{dt} \right)_r = 60 \frac{\text{J}}{\text{s}} \quad (15)$$

$$\left(\frac{dU_{\text{βαρ}}}{dt} \right)_r = \left(\frac{-dW_{\text{βαρ}}}{dt} \right) = \frac{-dW_{\text{βαρ}}}{dt} = \frac{-dW_{\text{βαρ}} dy}{dt} = -(-m_2 g v_r) = 1 \cdot 10 \cdot v_r \quad (16)$$

$$(15), (16) \quad 60 = 10v_{\Gamma} \rightarrow v_{\Gamma} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (17)$$

Γ5. Κατά την κίνηση του Σ_2 από το Β στο Γ η μεταβολή ορμής γράφεται:



$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\Gamma} - \vec{p}_A \rightarrow \Delta p^2 = p_{\Gamma}^2 + p_A^2 \rightarrow 10^2 = 6^2 + p_A^2 \rightarrow 100 = 36 + p_A^2 \rightarrow p_A^2 = 64 \rightarrow p_A = 8 \frac{\text{Kgm}}{\text{s}} \quad (18)$$

$$v_A = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (19)$$

Η τάση του νήματος δεν παράγει έργο κατά την κίνηση του Σ_2 από το Α στο Γ και επομένως η μηχανική ενέργεια του σώματος διατηρείται

$$E_{\text{μηχ}(A)} = E_{\text{μηχ}(\Gamma)}$$

$$K_{(A)} + U_{(A)} = K_{(\Gamma)} + U_{(\Gamma)}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_A^2 + 0 = \frac{1}{2} m_2 v_{\Gamma}^2 + m_2 g l \rightarrow \frac{1}{2} v_A^2 = \frac{1}{2} v_{\Gamma}^2 + g l \rightarrow \frac{1}{2} 8^2 = \frac{1}{2} 6^2 + 1 \cdot 10 \cdot l \rightarrow \frac{1}{2} 64 = \frac{1}{2} 36 + 10l$$

$$\rightarrow 32 = 18 + 10l \rightarrow l = 1.4 \text{m} \quad (20)$$

Λίγο πριν σπάσει το νήμα το νήμα είναι οριζόντιο και συνισταμένη κατά την διεύθυνση του νήματος γράφεται :

$$T = \frac{m_2 v_{\Gamma}^2}{l} = \frac{1 \cdot 6^2}{1.4} = \frac{36}{1.4} = \frac{360}{14} = \frac{180}{7} \text{N}$$

$$T = \frac{180}{7} \text{ N} \quad (21)$$

Γ6. Κατά την πλαστική κρούση των Σ_1 - Σ_3 έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ, αρχ} = \vec{p}_{ολ, αρχ} \rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_3) V_K \rightarrow 0,1 \cdot v_1 = 2 \cdot 5 \rightarrow v_1 = 100 \frac{m}{s} \quad (22)$$

Κατά την πλαστική κρούση των Σ_1 - Σ_2 έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ, αρχ} = \vec{p}_{ολ, τελ} \rightarrow m_1 v_1 + 0 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \rightarrow 0,1 \cdot v_1 = 0,1 \cdot 100 + 1 \cdot 8 \rightarrow v_1 = 180 \frac{m}{s} \quad (23)$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 ελάχιστη πριν την κρούση είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 180^2 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 32400 = \frac{1}{2} 3240 = 1620 \text{ J}$$

κατά την κίνηση του συσσωματώματος από τη θέση Β στη θέση Δ καθώς και από την θέση Δ στη θέση Θ όπου και ακινητοποιείται η παραγόμενη θερμότητα λόγω τριβών είναι ίση με την κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Δηλαδή:

$$Q_{\theta, \theta\Lambda} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_K^2 = \frac{1}{2} (2) 5^2 = 25 \text{ J} \quad (24)$$

και το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi\% = \frac{Q_{\theta, \theta\Lambda}}{K_1} 100\% = \frac{25}{1620} 100\% = \frac{25}{1620} 100\% = \frac{5}{324} 100\% = \frac{500}{324} \% = \frac{125}{81} \%$$

$$\Pi\% = \frac{125}{81} \% \quad (25)$$

ΘΕΜΑ Δ

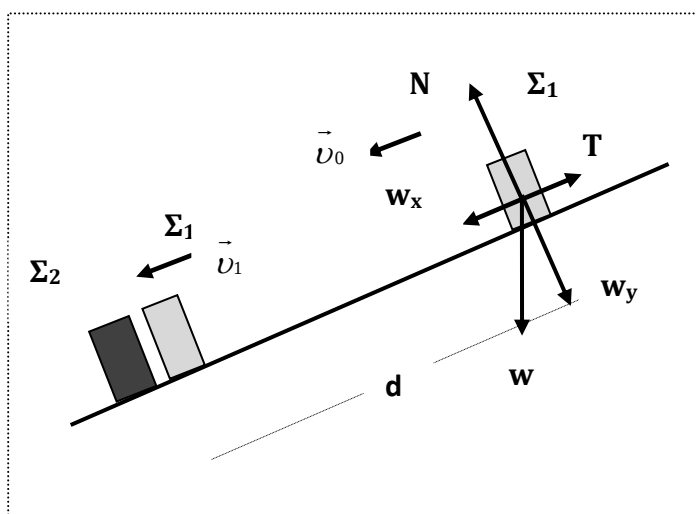
Δ1. Είναι $w_y = m_1 g \sin 30^\circ$

$$w_y = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = w_y \rightarrow N = 10\sqrt{3} \text{ N} \quad (26)$$

$$T = \mu N \rightarrow T = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{3} \rightarrow T = 10 \text{ N} \quad (27)$$

$$w_x = m_1 g \mu 30^\circ \rightarrow w_x = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ N} \quad (28)$$



Παρατηρούμε ότι το σώμα Σ_1 δέχεται μηδενική συνισταμένη και κατά συνέπεια πραγματοποιεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και φτάνει στη θέση όπου συμβεί η κρούση με ταχύτητα ίση με αυτή με την οποία εκτοξεύτηκε στη θέση Α.

Άρα $v_1 = v_0 \quad (29)$

Κατά την πλαστική κρούση των Σ_1 και Σ_2 η ολική ορμή διατηρείται.

$$\vec{p}_{ολ, αρχ} = \vec{p}_{ολ, τελ} \rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_3) V_K \rightarrow 2 \cdot v_1 = 4 \cdot V_K \rightarrow V_K = \frac{2}{4} \frac{m}{s} = \frac{1}{2} v_1 \quad (30)$$

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι:

$$K_{\text{συσ}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_1) V_K^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{v_1^2}{4}\right) = \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{v_1^2}{2}\right) = \frac{1}{2} K_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1.5 \text{ J} \quad (31)$$

Δ2.

Εύκολα προκύπτει ότι και για το συσσωμάτωμα η συνισταμένη δύναμη που δέχεται μέχρι να συναντήσει το ελατήριο είναι μηδέν, οπότε η ταχύτητα που έχει αμέσως μετά την κρούση διατηρείται σταθερή μέχρι την στιγμή που αυτό έρχεται σε επαφή με το ελατήριο. Τότε συμβαίνουν τα εξής:

Αλλάζει ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ο οποίος αποκτά τιμή ίση με το μισό της τιμής που είχε πριν. Αυτό σημαίνει ότι η τριβή που δέχεται πλέον το συσσωμάτωμα έχει στο εξής μέτρο ίσο με το μισό της τιμής που είχε πριν, Δηλαδή:

$T' = \mu' N'$ όπου N' η κάθετη δύναμη που δέχεται το συσσωμάτωμα από το κεκλιμένο

είναι προφανές ότι ισχύει $N' = (m_1 + m_2)g \sin 30^\circ = 4 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ N}$. (32)

$$T' = \mu' N' = \frac{\sqrt{3}}{6} 20\sqrt{3} \text{ N} = 10 \text{ N} \quad (33)$$

$$w'_x = (m_1 + m_2)g \eta \mu 30^\circ = 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 20 \text{ N} \quad (33)$$

Παρά το γεγονός ότι το σώμα μόλις έρθει σε επαφή με το ελατήριο δέχεται και την δύναμη από αυτό επιταχύνεται όσο το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι τέτοιο ώστε η συνισταμένη της δύναμης που αυτό ασκεί στο συσσωμάτωμα και της τριβής που δέχεται το συσσωμάτωμα έχει μέτρο μικρότερο από το μέτρο της συνιστώσας του βάρους του συσσωματώματος $w'_x = 20 \text{ N}$

Η ταχύτητα αποκτά μέγιστη τιμή στη θέση όπου μηδενίζεται η συνισταμένη, στη θέση όπου

$$F_{ελ} + T = w'_x \rightarrow kd + 10 = 20 \rightarrow 100d + 10 = 20 \rightarrow \mathbf{d = 0,1m} \quad (34)$$

Δ3. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για το συσσωμάτωμα από τη στιγμή που αυτό έρχεται σε επαφή με το ελατήριο μέχρι τη στιγμή που αποκτά μέγιστη ταχύτητα.

$$W_{ολ} = \Delta K \rightarrow W_{w'_x} + W_T + W_{F_{ελ}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\max}^2 - 1,5 \rightarrow$$

$$20 \cdot 0,1 - 10 \cdot 0,1 + \left(0 - \frac{1}{2} 100 \cdot 0,1^2\right) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\max}^2 - 1,5$$

$$2 - 1 - 0,5 = \frac{1}{2} 4 v_{\max}^2 - 1,5 = 2 v_{\max}^2 - 1,5 \rightarrow$$

$$0,5 + 1,5 = 2 v_{\max}^2 \rightarrow$$

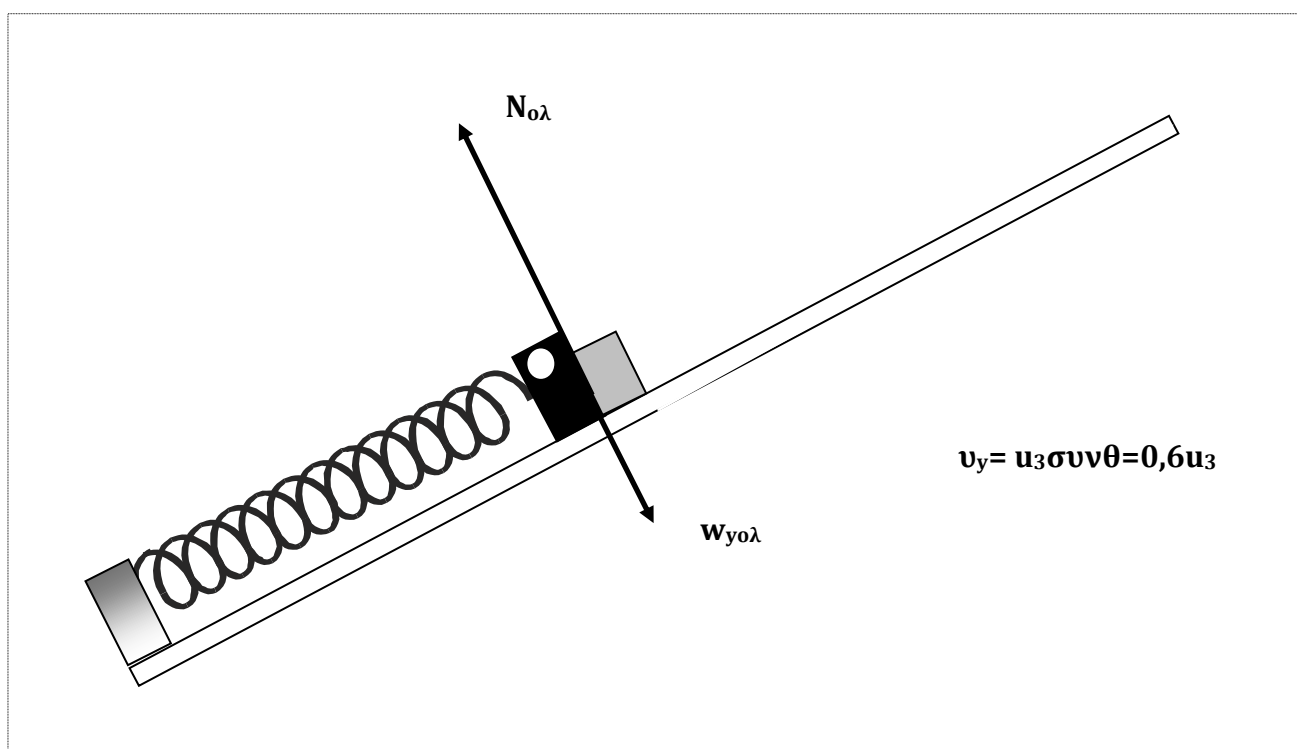
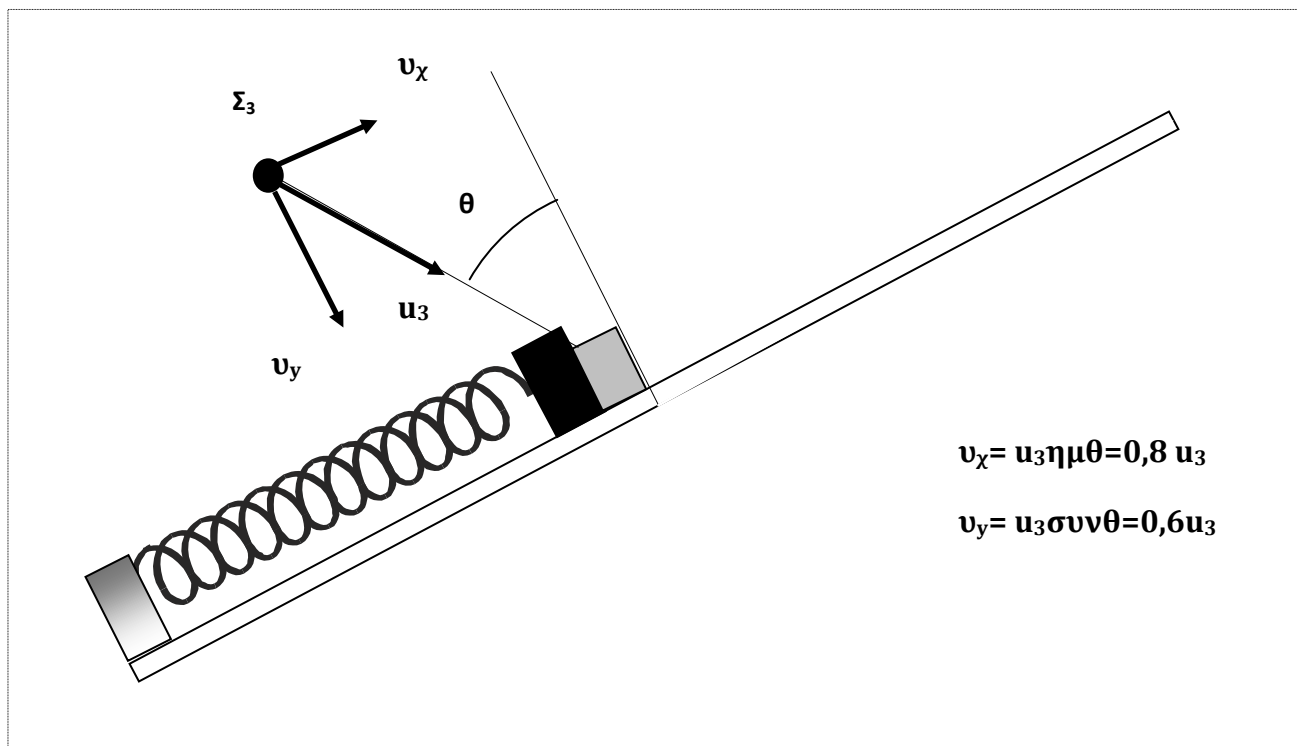
$$v_{\max} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (35)$$

Ο ρυθμός παραγωγής έργου από την δύναμη του ελατηρίου κατά την στιγμή που το σώμα αποκτά μέγιστη ταχύτητα είναι:

$$\frac{dW_{F_{ελ}}}{dt} = \frac{-F_{ελ} dx}{dt} = -k v_{\max} = -100 \cdot 0,1 \cdot 1 = \mathbf{-10 \frac{J}{s}} \quad (36)$$

Δ4. (x'x)

$$\vec{p}_{ολ,αρχ,x} = \vec{p}_{ολ,τελ,x} \rightarrow (m_1 + m_1)v_{\max} - m_3 v_{3x} = 0 \rightarrow 4 \cdot v_{\max} = 2v_3 \cdot 0,8 \rightarrow 2,5 \frac{m}{s} = v_3 \rightarrow u_3 = 2,5 \frac{m}{s} \quad (35)$$



Δ5. Κατά την διεύθυνση του άξονα y'y η ολική ορμή δεν διατηρείται επομένως έχουμε:

2ο Διαγώνισμα στις κρούσεις

$$\Sigma F_y = \Delta p_y \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{0 - m_3 v_{3y}}{\Delta t} = \frac{-m_3 v_{3y}}{\Delta t} = \frac{-2 \cdot 2,5 \cdot 0,6}{0,01} = \frac{3}{0,01} = 300 N$$

$$N_{o\lambda} - W_{o\lambda,y} = 300 N \rightarrow N_{o\lambda} = 300 + W_{o\lambda,y} = 300 + 20 = 320 N$$

$$\mathbf{N_{o\lambda} = 320 N} \quad (36)$$

mandravellis@gmail.com