Φύλλα εργασίας στις ταλαντώσεις. Από μία ιδέα του Νίκου Κριαρά, για χρήση στην τάξη της Γ Λυκείου.

Γραμμένες σε LaTeX με σχήματα από το TikZ, πλήρως ελεύθερες για κάθε χρήση.

1 Μηχανικές Ταλαντώσεις - Θεωρία

Τί είναι τα περιοδικά φαινόμενα;

Περίοδος:

Συχνότητα:

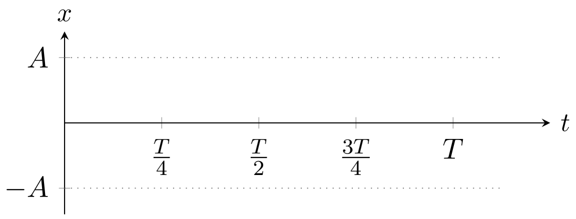
Τί είναι ταλάντωση;

Τί είναι γραμμική ταλάντωση;

Τί είναι απλή αρμονική ταλάντωση;

Απομάκρυνση:

$x =$

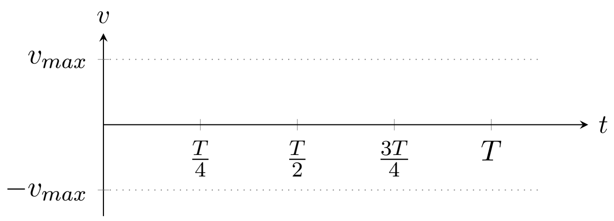


Ταχύτητα:

$v = v_{max}\,συν(\qquad)$

$v_{max} =$

ή $v = v_{max}\,ημ(\qquad)$

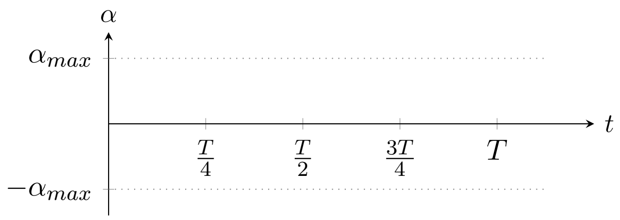


Επιτάχυνση:

$α = -α_{max}\,ημ(\qquad)$

$α_{max} = \qquad α_{max} =$

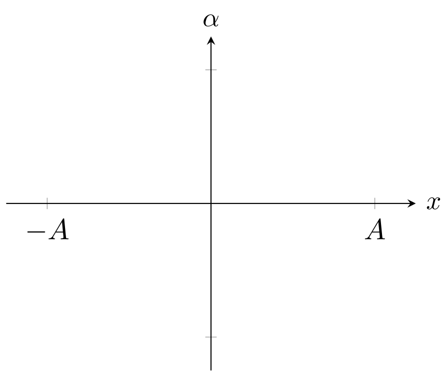
ή $α = α_{max}\,ημ(\qquad)$



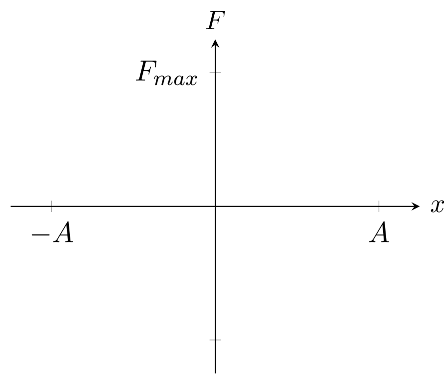
Σχέση επιτάχυνσης-απομάκρυνσης:

$α =$

► Τι φανερώνει η κλίση της γραφικής παράστασης α-x;



Ικανή και αναγκαία συνθήκη για α.α.τ.
$F = m\alpha =$



► Τι φανερώνει η κλίση στο διάγραμμα F-x;

▷ Να αποδειχθεί η σχέση της περιόδου

$D = m\omega^2 \Leftrightarrow$

▷ Σχέση ταχύτητας - απομάκρυνσης $\boxed{v = \quad}$

Απόδειξη:

Από Α.Δ.Ε.: $E = K + U \Leftrightarrow$

▷ Σχέση επιτάχυνσης - ταχύτητας $\boxed{\alpha = \quad}$

Απόδειξη:

$v = v_{max}\,\text{συν}\,\omega t$

$\alpha = -\alpha_{max}\,\text{ημ}\,\omega t$

▷ Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας: $\dfrac{\Delta v}{\Delta t} =$

▷ Ρυθμός μεταβολής ορμής: $\dfrac{\Delta p}{\Delta t} =$

▷ Ισχύει: $K + U = E \Leftrightarrow \dfrac{dK}{dt} + \dfrac{dU}{dt} = \dfrac{dE}{dt} \Leftrightarrow \dfrac{dK}{dt} = -\dfrac{dU}{dt}$

▷ Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας: $\dfrac{\Delta K}{\Delta t} =$

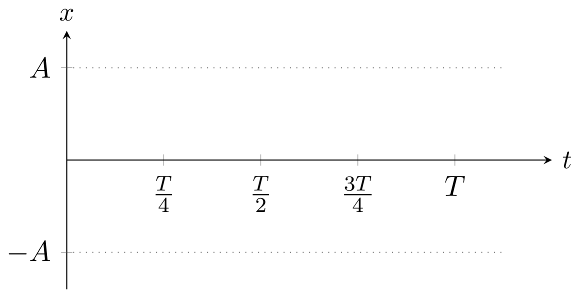
▷ Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας: $\dfrac{\Delta U}{\Delta t} =$

▷ Έργο δύναμης επαναφοράς: $W =$

2 Μηχανικές Ταλαντώσεις - Ενέργεια

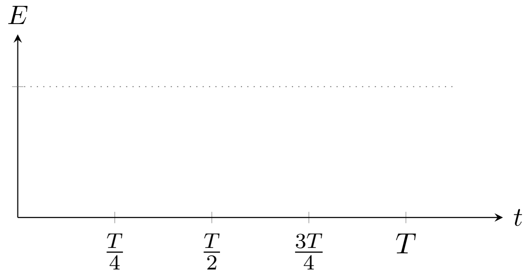
Γραφική παράσταση $U-t, K-t, E-t$

Θεωρούμε $x = A\,\text{ημ}\,\omega t$, $E = \dfrac{1}{2}DA^2 = \dfrac{1}{2}mv_{max}^2$



Δυναμική ενέργεια U=

Κινητική ενέργεια K=



Ολική ενέργεια E=

Παρατηρήσεις:

Η περίοδος της ενέργειας είναι:

Η συχνότητα της ενέργειας είναι:

► Που η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική; Πότε γίνεται αυτό;

Απόδειξη: Από την Α.Δ.Ε. στην ταλάντωση

► Για ποιές τιμές της ταχύτητας η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική;

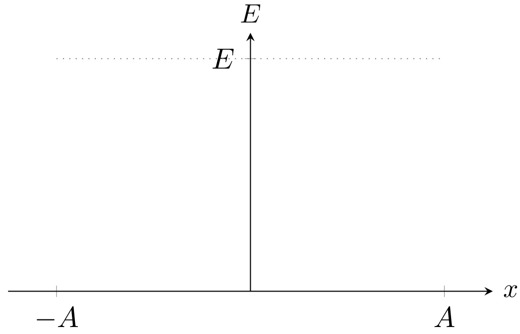
Απόδειξη: Από την Α.Δ.Ε. στην ταλάντωση

Γραφική παράσταση $U-x, K-x, E-x$

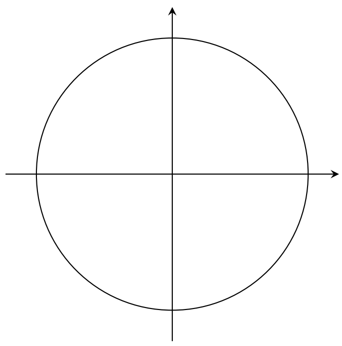
Δυναμική ενέργεια U=

Κινητική ενέργεια K=

Ολική ενέργεια E=



Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής στο προηγούμενο διάγραμμα;



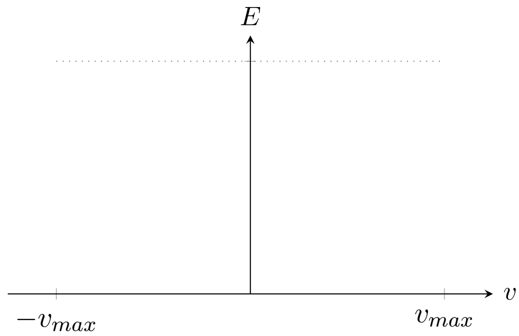
Σε ποιές θέσεις στο περιστρεφόμενο διάγραμμα αντιστοιχούν;

Γραφική παράσταση $U-v, K-v, E-v$

Δυναμική ενέργεια U=

Κινητική ενέργεια K=

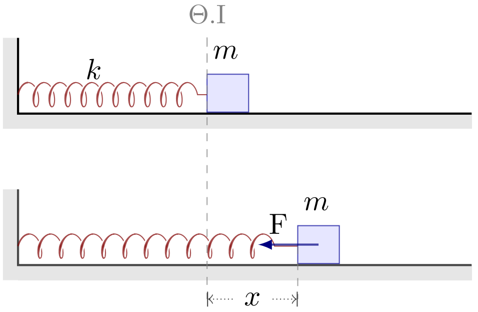
Ολική ενέργεια E=



Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής στο προηγούμενο διάγραμμα;

3 Ελατήρια

▷ Οριζόντιο ελατήριο



▷ Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα κάνει α.α.τ. αν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κάνει το σώμα α.α.τ. είναι η συνισταμένη δύναμη που δέχεται να είναι την μορφής ''δύναμη επαναφοράς'' $\Sigma F = -Dx$

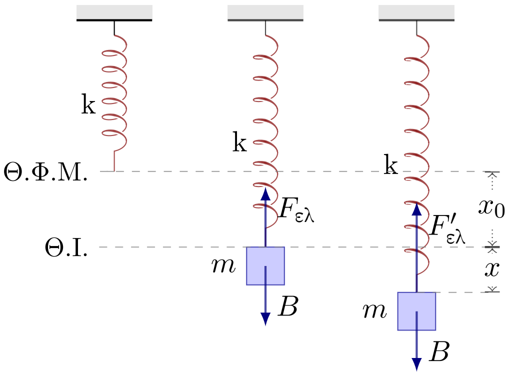
Η θέση φυσικού μήκους είναι και θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

Στην τυχαία απομάκρυνση x:

$\Sigma F =$

Άρα $D =$ και $T = 2\pi\sqrt{}$

▷ Κατακόρυφο ελατήριο



Απόδειξη ότι το σώμα κάνει α.α.τ.

Στη θέση ισορροπίας:

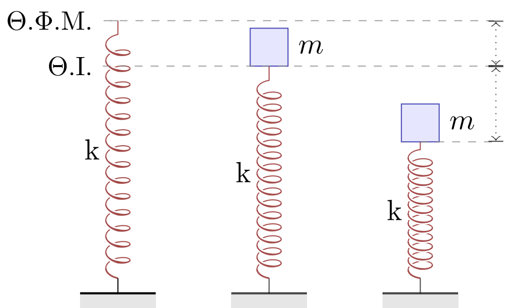
$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow$

Στην τυχαία απομάκρυνση x η συνισταμένη δύναμη είναι

$\Sigma F_y =$

Άρα $D =$ και $T = 2\pi\sqrt{}$

▷ Κατακόρυφο ελατήριο (β')



<u>Απόδειξη ότι το σώμα κάνει α.α.τ.</u>

Στη θέση ισορροπίας:

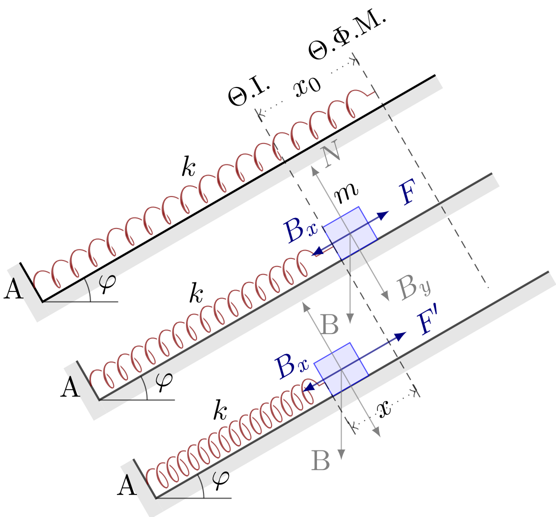
$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow$

Στην τυχαία απομάκρυνση x

$\Sigma F_y =$

Άρα $D =$ και $T = 2\pi\sqrt{}$

▷ <u>Ελατήριο με σώμα σε κεκλιμένο</u>



Για να δείξουμε ότι θα κάνει α.α.τ. αρκεί να δείξουμε ότι η ΣF στο σώμα έχει τη μορφή δύναμης επαναφοράς $\Sigma F = -Dx$, με D=σταθερά, αφού αυτή είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη της ταλάντωσης.

Αναλύουμε το βάρος B του σώματος:

$B_x =$

$B_y =$

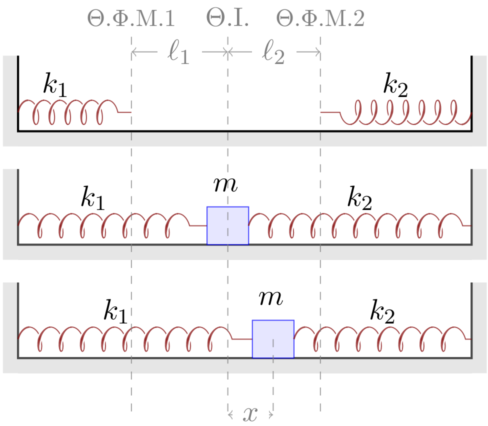
Στη θέση ισορροπίας $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow$

Στη θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. θα ισχύει:

$\Sigma F_x =$

Άρα $D =$ και $T = 2\pi\sqrt{}$

▷ <u>Δύο ελατήρια σε σώμα</u>: Περίπτωση (α΄).



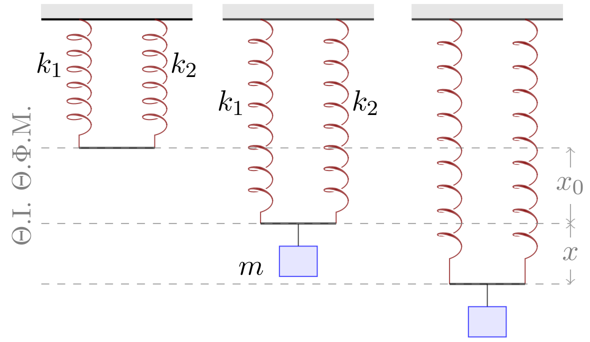
Η σταθερά επαναφοράς βρίσκεται να είναι $D = k_1 + k_2$.

Στη θέση ισορροπίας $\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow$

Στη θέση με απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. θα ισχύει:

$\Sigma F_x =$

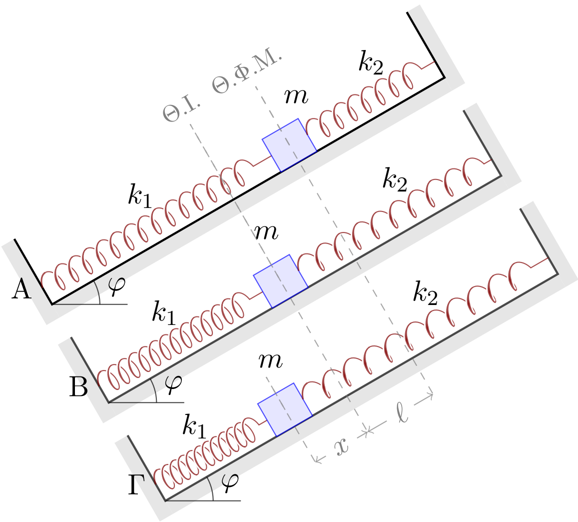
▷ Δύο ελατήρια σε σώμα



Η λεπτή ράβδος που συνδέει τα δύο ελατήρια είναι αμελητέας μάζας και δεν περιστρέφεται.

Το σύστημα αυτό είναι το ίδιο με την προηγούμενη περίπτωση (α΄).

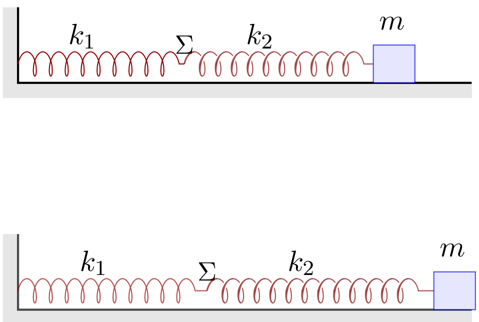
Η σταθερά επαναφοράς βρίσκεται πάλι να είναι $D = k_1 + k_2$.



▷ Το σώμα κρατείται στη θέση του σχήματος όπου τα δύο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Κάποια στιγμή το σώμα αφήνεται ελεύθερο.

Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

▷ Δύο ελατήρια σε σώμα: Περίπτωση (β΄).



Τα ελατήρια ασκούν την ίδια δύναμη, αλλά έχουν διαφορετικές παραμορφώσεις x_1 και x_2.

Η συνολική σταθερά επαναφοράς βρίσκεται $\frac{1}{D} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ ή $D = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Απόδειξη:

Η συνολική μετατόπιση του σώματος είναι $x = x_1 + x_2$.

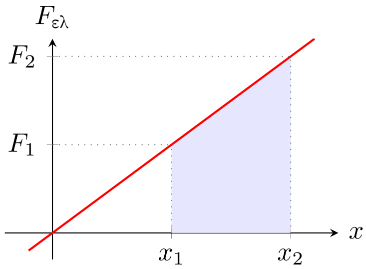
Το σημείο Σ δεν έχει μάζα, άρα οι δυνάμεις που δέχεται είναι αντίθετες, $F_1 = F_2 = F$. Το σώμα δέχεται την δύναμη $F_2 = F$.

Ισχύουν $x_1 = \frac{F}{k_1}$, $x_2 = \frac{F}{k_2}$, $x = \frac{F}{D}$

$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow$

• Έργο δύναμης ελατηρίου

Η $F_{\varepsilon\lambda}$ είναι μεταβλητή με την απόσταση x άρα το έργο της θα βρεθεί με το εμβαδό της γραφικής παράστασης $F - x$. Το μέτρο της δύναμης είναι $F = kx$



Για μετατόπιση από παραμόρφωση x_1 σε παραμόρφωση x_2 έχουμε:

$$W = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)k(x_1 + x_2) \Leftrightarrow$$

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

- <u>Δυναμική ενέργεια ελατηρίου</u>

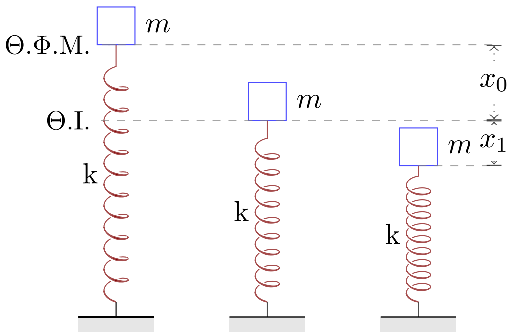
Από την προηγούμενη σχέση φαίνεται ότι μπορούμε να αποδώσουμε δυναμική ενέργεια $U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$ σε ελατήριο με παραμόρφωση x από τη θέση φυσικού μήκους του (Θ.Φ.Μ.). Η έκφραση είναι ίδια με την δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $U_T = \frac{1}{2}Dx^2$, όταν έχουμε ελατήριο όπου $D = k$ αλλά για την δυναμική ταλάντωσης U_T το x *είναι μετρημένο από τη θέση ισορροπίας Θ.Ι. της ταλάντωσης.*

Χρησιμοποιώντας τον γενικό ορισμό της δυναμικής ενέργειας δύναμης $W_F = -\Delta U$ ή $W_F = U_{αρχ} - U_{τελ}$ βρίσκουμε τον γενικότερο τύπο του έργου ελατηρίου:

$$\boxed{W_{ελ} = \frac{1}{2}kx_{αρχ}^2 - \frac{1}{2}kx_{τελ}^2}$$

όπου $x_{αρχ}$ και $x_{τελ}$ είναι μετρημένα από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου. Ο παραπάνω τύπος μας δίνει αυτόματα και το πρόσημο του έργου ελατηρίου.

▷ <u>Σώμα m αφήνεται σε ελατήριο</u>



Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m, που βρίσκεται στη Θ.Φ.Μ. του, αφήνεται σώμα μάζας $m = 1$ Kg χωρίς αρχική ταχύτητα.

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A =$

γιατί

Βρίσκουμε το x_0:

Στη θέση ισορροπίας $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης φ_0:

Την $t = 0$ $x = +A \Leftrightarrow +A = A\,\text{ημ}(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow$

Η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης $x =$

Όταν το σώμα βρεθεί σε απομάκρυνση $x_1 = -\frac{A}{2}$ τότε:

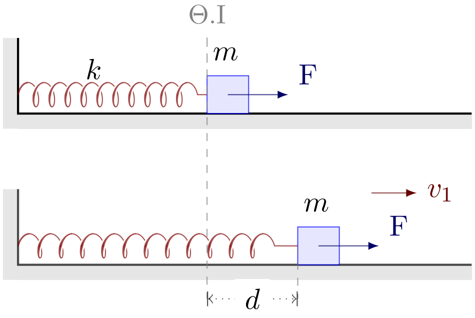
▷ Η συνισταμένη δύναμη στο σώμα (δύναμη επαναφοράς) είναι $\Sigma F =$

▷ Η δύναμη του ελατηρίου είναι $F_{ελ} =$

▷ Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι $U =$

▷ Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου είναι $U_{ελ} =$

▷ Δύναμη που προσφέρει ενέργεια στο σύστημα k-m



Σώμα μάζας $m = 1$ Kg είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m και το σύστημα ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 10$ N μέχρι να μετατοπιστεί κατά $d = 5$ cm, όπου η δύναμη καταργείται και το σύστημα κάνει α.α.τ.

1. Να βρεθεί το έργο της δύναμης F και η ολική ενέργεια της ταλάντωσης.
2. Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης.
3. Να βρεθεί η ταχύτητα v_1 όταν καταργείται η δύναμη F.

Το έργο της δύναμης F είναι $W_F = Fd =$

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας η ενέργεια ταλάντωσης θα είναι ίση με το έργο της δύναμης που διεγείρει το σύστημα, άρα $E_T = W_F =$

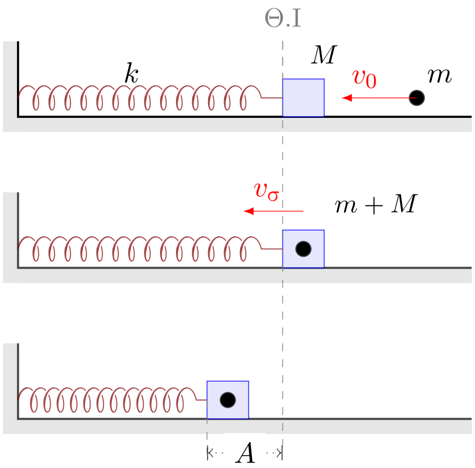
Επομένως $\frac{1}{2}kA^2 =$

Η ταχύτητα μπορεί να βρεθεί με Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος από τη Θ.Ι. μέχρι τη θέση d.

$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\text{ολ}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = W_F - W_{\text{ελ}} \Leftrightarrow$

4 Ελατήρια και κρούσεις

▷ Οριζόντιο ελατήριο



Αφού σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής θα έχουμε

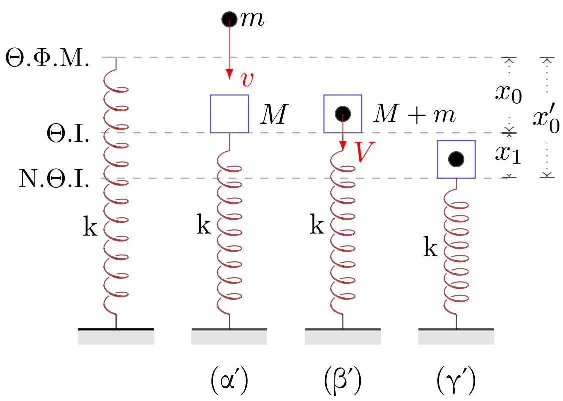
$p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Leftrightarrow$

Αρα $v_\sigma =$

Η θέση ισορροπίας δεν αλλάζει οπότε η ταχύτητα v_σ είναι η

Επομένως $A =$

▷ Κατακόρυφη κρούση



Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100$ N/m, ισορροπεί σώμα μάζας $M = 3$ Kg. Βλήμα μάζας $m = 1$ Kg κινείται κατακόρυφα με $v = 10$ m/s και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M. (σχήματα α′ και β′).

Το συσσωμάτωμα στο σχήμα β′ δεν βρίσκεται σε ακραία θέση γιατί

Βρίσκουμε το x_0: $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow$

Βρίσκουμε το x_0': $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow$

άρα $x_1 =$

Έχουμε πλαστική κρούση άρα ισχύει η Α.Δ.Ο. $p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V =$

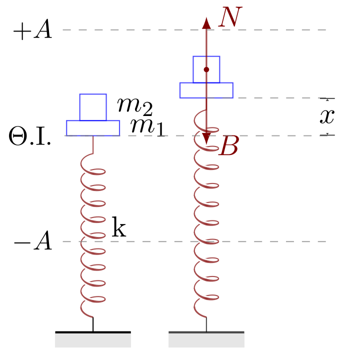
Το συσσωμάτωμα στη θέση β′ βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1 από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και έχει ταχύτητα V άρα

$K + U = E \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A =$

5 Χάσιμο επαφής σωμάτων

▷ <u>Κατακόρυφη ταλάντωση</u>



Σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k, βρίσκεται στερεωμένο σώμα μάζας m_1 και πάνω του βρίσκεται δεύτερο σώμα m_2. Τα σώματα πιέζονται προς τα κάτω κατά A και αφήνονται ελεύθερα να κάνουν ταλάντωση.

Σε ποια θέση το σώμα m_2 θα χάσει τη επαφή του με το σώμα m_1;

Ποια είναι η μέγιστη συμπίεση προς τα κάτω ($A_{\max}$) για την οποία το σώμα m_2 δεν χάνει την επαφή του κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης;

Και τα δύο σώματα κάνουν α.α.τ. με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος m_2 είναι $D_2 = m_2\omega^2$ και αφού και αυτό κάνει α.α.τ. θα ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη $\Sigma F = -D_2 x$

Από το σχήμα έχουμε:

$$\Sigma F = -D_2 x \Leftrightarrow N - B = -D_2 x$$
$$N = m_2 g - m_2\omega^2 x$$

Όμως για να μην χαθεί η επαφή πρέπει να ισχύει $N \geq 0$ επομένως

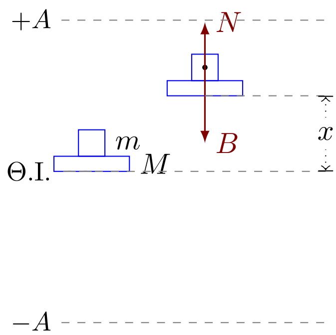
$$m_2 g - m_2\omega^2 x \geq 0$$
$$x \leq \frac{g}{\omega^2}$$

Άρα η επαφή θα χαθεί αν το σώμα φτάσει σε απομάκρυνση $x = \frac{g}{\omega^2}$.

Και επειδή $x \in [-A, +A]$ αν θέλουμε το μέγιστο πλάτος για το οποίο δεν χάνεται η επαφή θα πρέπει:

$$A_{\max} = \frac{g}{\omega^2}$$

▷ <u>Κατακόρυφη ταλάντωση β΄</u>



Σώμα μάζας M μπορεί να εκτελεί α.α.τ. σταθερού πλάτους A και ρυθμιζόμενης συχνότητας ω Πάνω στο σώμα M βρίσκεται σε επαφή δεύτερο σώμα m.

Σε ποια θέση το σώμα m θα χάσει τη επαφή του με το σώμα M;

Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα που μπορούμε να πετύχουμε για την οποία το σώμα m δεν χάνει την επαφή του κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης;

Και τα δύο σώματα κάνουν α.α.τ. με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{D}{M+m}}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος m είναι $D_2 = m\omega^2$ και αφού και αυτό κάνει α.α.τ. θα ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη $\Sigma F = -D_2 x$

Από το σχήμα έχουμε:

$$\Sigma F = -D_2 x \Leftrightarrow N - B = -D_2 x$$
$$N = m_2 g - m_2 \omega^2 x$$

Όμως για να μην χαθεί η επαφή πρέπει να ισχύει $N \geq 0$ επομένως

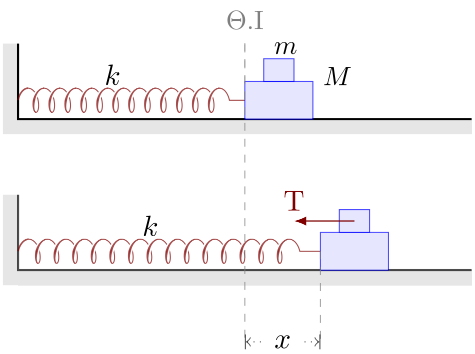
$$m_2 g - m_2 \omega^2 x \geq 0$$
$$x \leq \frac{g}{\omega^2}$$

Άρα η επαφή θα χαθεί όταν (αν) το σώμα φτάσει σε απομάκρυνση $x = \frac{g}{\omega^2}$.

Και επειδή $x \in [-A, +A]$ αν θέλουμε τη μέγιστη συχνότητα για την οποία δεν χάνεται η επαφή θα πρέπει:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{A}}$$

▷ Ολίσθηση σώματος



Στο διπλανό σχήμα το σώμα m βρίσκεται πάνω στο σώμα M που είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μ, ενώ το έδαφος είναι λείο. Το σώμα M μετατοπίζεται κατά x και το σύστημα αφήνεται να κάνει α.α.τ.

Ποια είναι η μέγιστη μετατόπιση του σώματος M για την οποία το σώμα m δεν ολισθαίνει;

Και τα δύο σώματα κάνουν α.α.τ. με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m+M}}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος m είναι $D_2 = m\omega^2$ και αφού και αυτό κάνει α.α.τ. θα ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη $\Sigma F = -D_2 x$

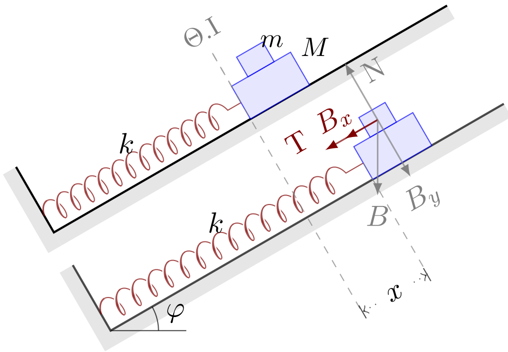
Στη θέση με απομάκρυνση x το σύστημα έχει επιτάχυνση α προς τη ϑ.Ι. της ταλάντωσης. Επομένως

$$-T = -m_2 \alpha$$
$$T = m\omega^2 x$$

Όμως για τη στατική τριβή ισχύει $T \leq \mu N \Leftrightarrow T \leq \mu m g$ άρα

$$m\omega^2 x \leq \mu m g$$
$$x \leq \frac{\mu g}{\omega^2}$$
$$x \leq \frac{\mu(m+M)g}{K} \tag{1}$$

▷ Ολίσθηση σώματος σε κεκλιμένο επίπεδο



Στο διπλανό σχήμα το σώμα m βρίσκεται πάνω στο σώμα M που είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς k. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων είναι μ, ενώ το έδαφος είναι λείο. Το σώμα M μετατοπίζεται κατά x και το σύστημα αφήνεται να κάνει α.α.τ.

Ποια είναι η μέγιστη μετατόπιση του σώματος M για την οποία το σώμα m δεν ολισθαίνει;

Όσο τα δύο σώματα κάνουν α.α.τ. ως ένα σώμα έχουν κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{K}{m+M}}$. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος m είναι $D_2 = m\omega^2$ και αφού καί αυτό κάνει α.α.τ. θα ισχύει η ικανή και αναγκαία συνθήκη $\Sigma F = -D_2 x$

Από την ανάλυση του βάρους σε άξονες έχουμε

$$B_x = -mg\,\text{ημ}\,\varphi$$
$$B_y = mg\,\text{συν}\,\varphi$$

και

$$\Sigma F_y =$$
$$B_y = N$$

Στη θέση με απομάκρυνση x το σύστημα έχει επιτάχυνση α προς τη ϑ.Ι. της ταλάντωσης. Αν $\alpha \geq B_x/m$ ή $x \geq \frac{g\,\text{ημ}\,\varphi}{\omega^2}$ τότε η τριβή έχει τη φορά της $\vec{B}_x$. Επομένως

$$\Sigma F_x = m\alpha$$
$$-T - mg\,\text{ημ}\,\varphi = -m\alpha$$
$$T = m\omega^2 x - mg\,\text{ημ}\,\varphi$$

Όμως για τη στατική τριβή ισχύει $T \leq \mu N \Leftrightarrow T \leq \mu mg\,\text{συν}\,\varphi$ άρα

$$m\omega^2 x - mg\,\text{ημ}\,\varphi \leq \mu mg\,\text{συν}\,\varphi$$
$$x \leq \frac{\mu g\,\text{συν}\,\varphi + g\,\text{ημ}\,\varphi}{\omega^2}$$
$$x \leq \frac{(m+M)(\mu g\,\text{συν}\,\varphi + g\,\text{ημ}\,\varphi)}{K} \tag{2}$$

Αν στην αρχική θέση ισχύει Αν $\alpha \leq B_x$ ή ή $x \leq \frac{g\,\text{ημ}\,\varphi}{\omega^2}$ τότε η φορά της στατικής τριβής είναι αντίθετη αυτής της $\vec{B}_x$ και στο τελικό αποτέλεσμα θα έχουμε

$$x \geq \frac{(m+M)(g\,\text{ημ}\,\varphi - \mu g\,\text{συν}\,\varphi)}{K}$$

Όταν το σώμα περάσει τη Θ.Ι. η επιτάχυνση αλλάζει φορά και είναι αντίθετη της $\vec{B}_x$. Τότε σίγουρα η στατική τριβή έχει της φορά της επιτάχυνσης (θετική) και με τον ίδιο τρόπο προκύπτει:

$$x \leq \frac{(m+M)(\mu g\,\text{συν}\,\varphi - g\,\text{ημ}\,\varphi)}{K}$$

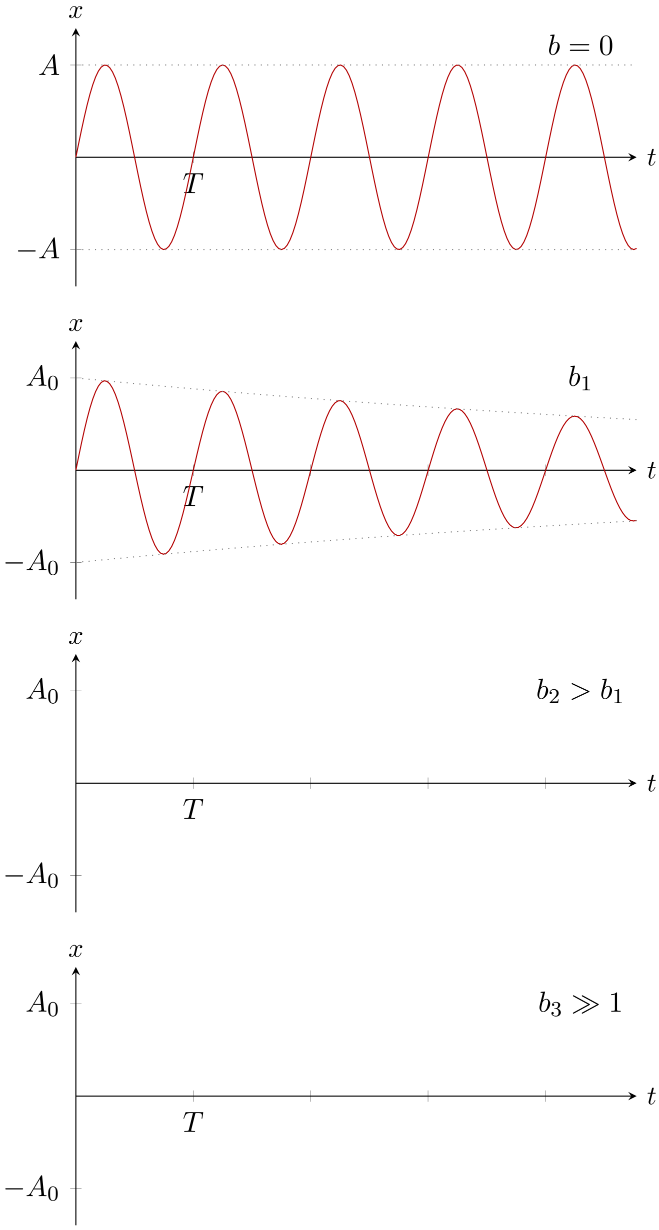
Από τις (2) και (5) προκύπτει ότι το μέγιστο x θα δίνεται από τη σχέση (5).

6 Φθίνουσες Ταλαντώσεις

Τι μορφή έχει η δύναμη αντίστασης σε μία φθίνουσα ταλάντωση;

Τι ξέρουμε για την περίοδο σε μία φθίνουσα ταλάντωση με δεδομένη σταθερά απόσβεσης b;

Να συμπληρωθούν οι καμπύλες για τις παρακάτω φθίνουσες ταλαντώσεις στο ίδιο σύστημα για τις διάφορες τιμές της σταθερά απόσβεσης b.



Πώς ονομάζεται η κίνηση του συστήματος όταν $b \gg 1$;

Η εξίσωση που δίνει το πλάτος σε μία φθίνουσα ταλάντωση είναι: $\boxed{A =}$

Ο λόγος των πλατών στο τέλος της $1^{ης}$, $2^{ης}$, ... περιόδου είναι: $\boxed{\dfrac{A_0}{A_1} =}$

Ο λόγος των ενεργειών ταλάντωσης στο τέλος της $1^{ης}$, $2^{ης}$, ... περιόδου είναι: $\boxed{\dfrac{E_0}{E_1} = \quad\quad\quad}$

Η εξίσωση που δίνει την εκθετική μείωση της ενέργειας σε μία φθίνουσα ταλάντωση είναι: $\boxed{E = \quad\quad\quad}$

Η σταθερά Λ εξαρτάται από (α) και (β)

Στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις τον ρόλο της σταθεράς απόσβεσης b τον παίζει:

Το έργο της αντίστασης μπορεί να βρεθεί με τη μείωση της

$W_{\mathrm{F'}} =$

Ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της ενέργειας ταλάντωσης είναι ίσος με τον ρυθμό παραγωγής θερμότητας από την δύναμη αντίστασης, επομένως

$$\frac{\Delta E_{\text{απ}}}{\Delta t} = P_{\mathrm{F'}} =$$

Αν E_0 είναι η ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ και κάποια άλλη χρονική στιγμή η ενέργεια είναι E τότε το ποσοστό απώλειας ενέργειας είναι:

$\pi\% =$

ενώ το ποσοστό μείωσης της ενέργειας είναι:

$\pi\% =$

Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας που έγινε θερμότητα λόγω της αντίστασης είναι:

$\pi\% =$

7 Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

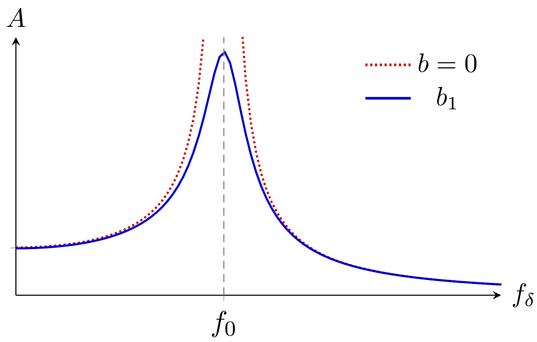
Ποιος είναι ο λόγος που συχνά χρησιμοποιούμε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις;

Τι είδους δύναμη πρέπει να δρα στο σύστημα ώστε να έχουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση;

Ένα σύστημα έχει ιδιοσυχνότητα f_0, δέχεται δύναμη αντίστασης της μορφής $F' = -bv$ και κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με τον διεγέρτη να έχει συχνότητα f_δ. Με ποια συχνότητα κάνει ταλάντωση το σύστημα;

Τι κάνει το πλάτος της ταλάντωσης στην εξαναγκασμένη ταλάντωση για μία δεδομένη τιμή της συχνότητας f_δ; Πως εξηγείται αυτό ενεργειακά;

Να συμπληρωθούν οι καμπύλες για σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις στο ίδιο σύστημα για τις διάφορες τιμές της σταθεράς απόσβεσης b μεγαλύτερες της b_1.



Πότε έχουμε συντονισμό σε ένα σύστημα που κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση;

Με ποιο τρόπο πετυχαίνουμε εξαναγκασμένη ταλάντωση σε ένα RLC κύκλωμα;

Γιατί έχουμε μεγιστοποίηση του πλάτους στον συντονισμό;

Ένα σύστημα έχει ιδιοσυχνότητα f_0 (ω_0) και κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με τον διεγέρτη να έχει συχνότητα f_δ. Με ποια συχνότητα ω κάνει ταλάντωση το σύστημα;

Ποια είναι τότε η μέγιστη ταχύτητα όταν περνάει από τη Θ.Ι.;

Ποια είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια $K_{\max}$ τότε;

Η ιδιοσυχνότητα f_0 ενός συστήματος δίνεται από τον τύπο $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{D}{m}}$ επομένως ισχύει πάλι $D = m\omega_0^2$. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια $U_{\max}$ του συστήματος θα είναι:

Τι παρατηρούμε για τις μέγιστες ενέργειες $K_{\max}$ και $U_{\max}$ στην εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν $\omega_0 \neq \omega_\delta$;

Ισχύει για τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις η γνωστή σχέση $E = K + U$, όπου $E = K_{\max}$ ή $E = U_{\max}$; Πότε ισχύει $K_{\max} = U_{\max}$;

8 Σύνθεση Ταλαντώσεων

▷ Ταλάντωση με ίδια συχνότητα ...

Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\,\text{ημ}\,\omega t \\ x_2 &= A_2\,\text{ημ}(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή της   η απομάκρυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή θα είναι

$$x = x_1 + x_2$$

και η σχέση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\boxed{x = A\,\text{ημ}(\omega t + \theta)}$$

όπου:

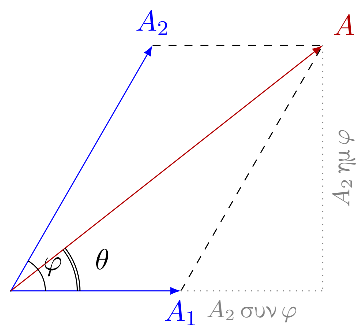
$$A = \sqrt{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\text{εφ}\,\theta = \frac{\qquad\qquad}{}$$

Η θέση των περιστρεφόμενων διανυσμάτων τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η φάση της ταλάντωσης x_2 είναι μεγαλύτερη κατά φ από αυτή της x_1.

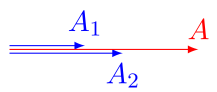
Η φάση της συνισταμένης ταλάντωσης είναι θ σε σχέση με την φάση της x_1.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο φαίνεται η εξήγηση του τύπου εύρεσης του πλάτους αλλά και της φάσης θ της συνισταμένης ταλάντωσης.

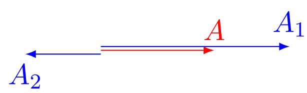


Ειδικές περιπτώσεις

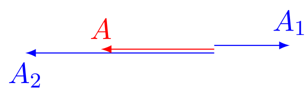
• Όταν $\varphi = 0$ τότε $\begin{cases} A = A_1 + A_2 \\ \theta = 0 \end{cases}$



• Όταν $\varphi = \pi$ και $A_1 > A_2 \Rightarrow \begin{cases} A = A_1 - A_2 \\ \theta = 0 \end{cases}$



• Όταν $\varphi = \pi$ και $A_1 < A_2 \Rightarrow \begin{cases} A = A_2 - A_1 \\ \theta = \pi \end{cases}$

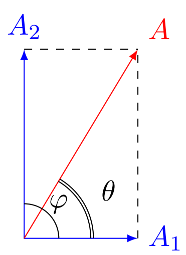


• Όταν $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ δηλαδή $\begin{cases} x_1 = A_1\,\text{ημ}\,\omega t \\ x_2 = A_2\,\text{ημ}(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

τότε:

$A =$

$\text{εφ}\,\theta =$



▷ Ταλάντωση με ίδια πλάτη και διαφορετικές συχνότητες ...

Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις

$$x_1 = A\,\text{ημ}\,\omega_1 t$$
$$x_2 = A\,\text{ημ}\,\omega_2 t$$

Τότε η απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{x = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

▷ Ταλάντωση με ίδια πλάτη και παραπλήσιες συχνότητες ...(διακρότημα)

Ένα σώμα κάνει ταυτόχρονα τις ταλαντώσεις

$$x_1 = A\,\text{ημ}\,\omega_1 t$$
$$x_2 = A\,\text{ημ}\,\omega_2 t$$

όπου $\omega_1 \approx \omega_2$.

Τότε η απομάκρυνση του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{x = A'\,\text{ημ}\,\bar{\omega}t}$$

Όπου: $A' =$

και $\bar{\omega} =$

Το πλάτος A' της σύνθετης ταλάντωσης μεταβάλλεται αργά από μέχρι και η κίνηση λέμε ότι παρουσιάζει *διακροτήματα*.

Περίοδος διακροτήματος T_δ ονομάζεται ο χρόνος

και ισχύει: $T_\delta =$

ενώ η συχνότητα των διακροτημάτων είναι $f_\delta =$

▷ Πόσες πλήρεις ταλαντώσεις κάνει το σώμα μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους:

Η Συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f = \bar{f} = \dfrac{f_1 + f_2}{2}$ άρα η περίοδος $T = \dfrac{2}{f_1 + f_2}$ ενώ η περίοδος διακροτήματος $T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$.

Επειδή $T_\delta = NT$ θα είναι:

$N =$